

Приложение

Компьютерный метод исследования функциональных зависимостей в геометрических фигурах

Что, как и от чего зависит?

1. Введение

Функциональное мышление как цель математического образования было признано еще 100 лет назад (Gutzmer: “Meraner Lehrplan” 1905). Оно было также принято в качестве центральной идеи в современной дидактике математики; (см. например, F.Schweiger (1992) - “идея функционального варьирования» или G.Неуманн (1996), “идея функциональных связей”. - Катя Крюгер в своей весьма содержательной диссертации “Воспитание функционального мышления - к истории дидактического принципа” (1999) тщательно проанализировала специфическую связь между развитием математического образования и развитием экономики, техники и науки в обществе.

В настоящее время использование компьютеров в преподавании и изучении математики и изучении математики способствует развитию функционального мышления благодаря возможности динамического представления и обработки разнообразных графических, числовых и алгебраических данных и объектов. Например, динамические геометрические системы (ДГС), разработанные для планиметрии, значительно превосходят по своим возможностям традиционные методы изучения геометрических объектов. Такие системы обладают также новыми возможностями в изучении функциональных зависимостей в геометрических фигурах: мы можем производить измерения в геометрических фигурах, проверять на основе этих измерений количественные соотношения (например, между длинами, площадями, углами, и т.д.), варьируя фигуры в режиме Drag-and-Drop (Schumann, 1994). Функциональное соотношение может быть также представлено в таблице значений или, в случае свойства, зависящего только от одного параметра, как график в системе координат (Schumann, 1995).

Изображение функциональной зависимости на графике является особенно наглядным. Поэтому такое представление является существенным в данном методе исследования функциональных зависимостей в геометрических фигурах. Однако графическое представление является не целью исследования, а скорее стимулом для дальнейшего математического анализа.

Педагогическая цель нижеследующего метода была удачно сформулирована Мертенсом (1990): “Цель образования состоит не только в усвоении понятия функции, но гораздо больше в достижении такой готовности к восприятию и анализу, при которой достаточно просто взглянуть на результаты варьирования количественных переменных, чтобы увидеть между ними существенную связь.”

Приложение 2

Описание **компьютерного метода** изучения зависимостей в геометрических фигурах:

- (1) *Построение геометрической фигуры или части фигуры*, для которой заданная величина (результата измерения или его функция) зависит от варьируемой величины.
- (2) *Представление функциональной зависимости* между зависимой и независимой переменными в виде графика “эмпирической” функции.
- (3) *Интерпретация “эмпирического” графика* (также наблюдение за изменением характеристик графика при варьировании параметров фигур и сравнение с другими графиками)
- (4) *Вывод аналитического выражения*, задающего данные эмпирическими зависимостями.
- (5) *Проверка* согласия между аналитической и эмпирической зависимостями.
- (6) *Обсуждение* полученного аналитического выражения (критические точки, точки экстремума и т.д.).

Замечания:

Фигуру нужно строить так, чтобы рассматриваемая величина зависела только от одной переменной, остальные параметры должны оставаться фиксированными.

Поскольку зависимость описывается функцией одной переменной, перемещаемая точка должна двигаться вдоль некоторой заданной линии так, чтобы изменялся только один параметр. Так как геометрические величины неотрицательны, при построении графика можно ограничиться только первым квадрантом.

График называется эмпирическим, так как выражение функции еще неизвестно. Вывод функционального равенства является собственно математической работой; он предполагает наличие знаний соответствующего математического аппарата.

Проверка правильности полученной функции носит прикладной формальный характер: для некоторых значений переменной нужно рассчитать значение функции; “аналитический” график должен совпасть с графиком, полученным эмпирически.

2 Применение метода на семействе задач

Ниже мы приводим ряд примеров заданий на применение метода вместе с решениями на примере параллелограмма (в обычных обозначениях). При этом не все шаги методической схемы отражены одинаково. Мы ограничились такими соотношениями, которые получаются непосредственно из измеряемых параметров (длина, площадь поверхности, величина угла). Примеры приводятся с использованием Cabri Géomètre II (Laborde 1994). Для доказательства выражения функции необходимы знания по тригонометрии за 10 класс.

Наша подборка задач на изучение функций может быть рассмотрена как семейство задач (Walsch, 1995).

Пример 1

Как зависит площадь и периметр параллелограмма ABCD от длины стороны b при постоянной длине стороны a и угла α между сторонами?

Перемещая точку D , которая привязана к одному лучу угла α , изменяется b ; мы получаем эмпирический график как линию геометрических мест площади с начальной точкой в начале координат и периметра с начальной точкой $(0; 2a)$, (линейная функция; рис. 1а). При изменении, например, параметра фигуры α получают график как на Рис. 1б.

Функциональное равенство:

$$F = (a_0 \sin \alpha_0) b, \text{ коэффициент пропорциональности: } a_0 \sin \alpha_0$$

$$u = 2 b + 2 a_0; \text{ начальное значение: } 2 a_0; \text{ тангенс угла: } 2.$$

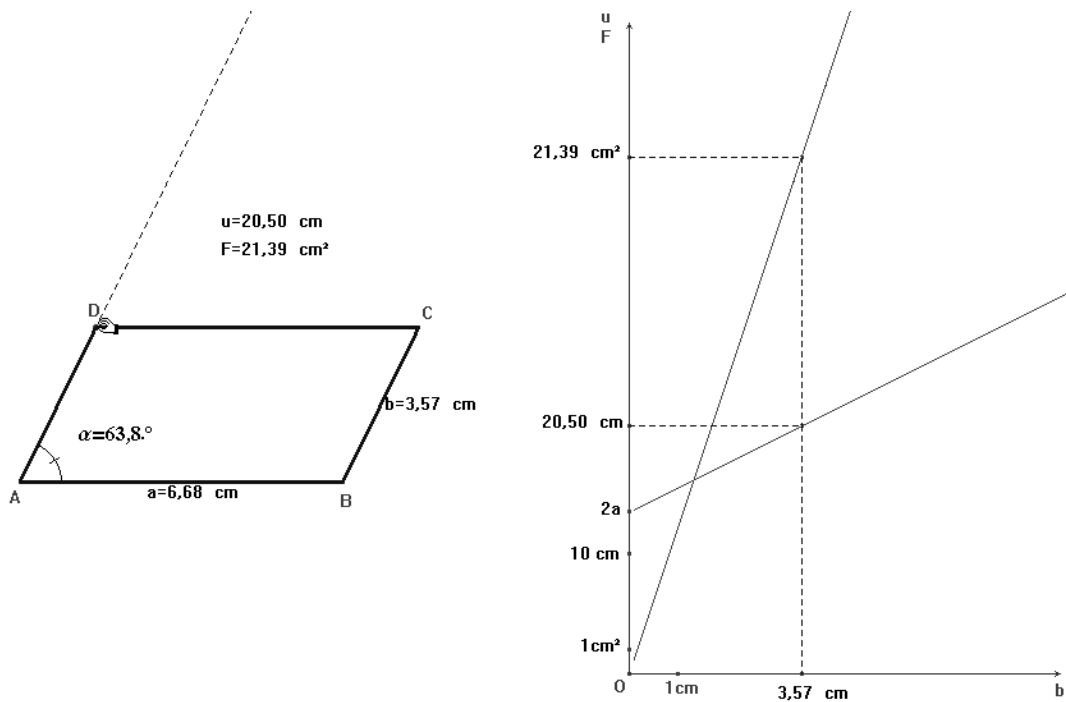


Рис. 1а

Приложение 4

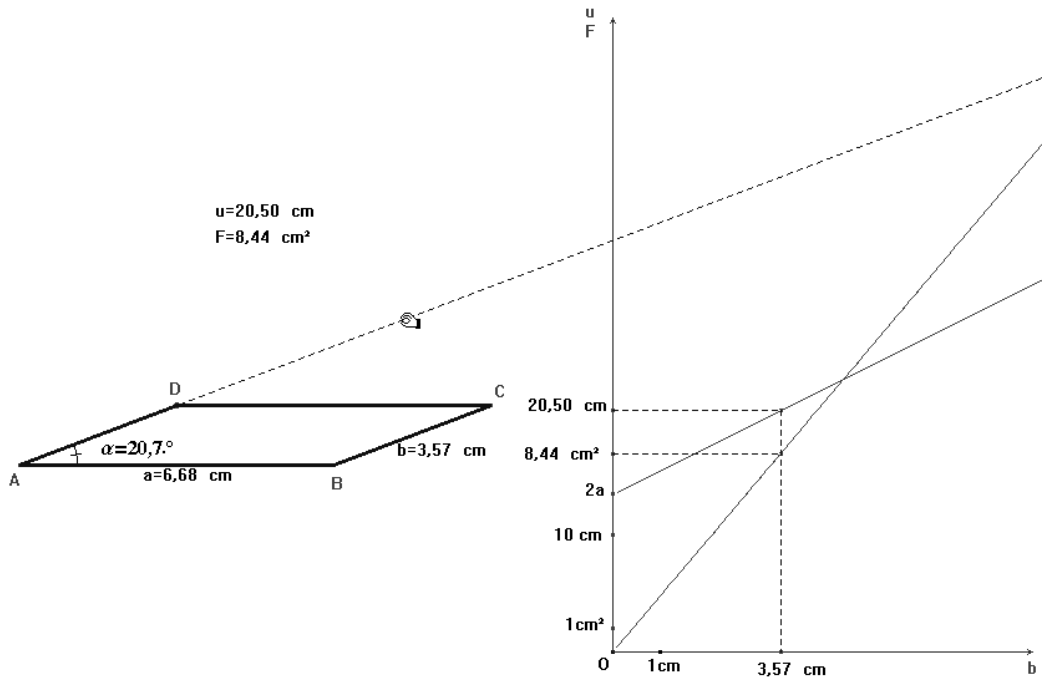


Рис. 1b

В следующих четырех примерах исследуется, как меняется площадь (периметр) при условии, что периметр (площадь) параллелограмма остается постоянным.

Пример 2

Как зависит площадь и периметр параллелограмма от угла α , если значения a и b постоянны?

Точка D привязывается к полукругу; α изменяется между 0° и 180° (рис. 2). Прямая, параллельная горизонтальной оси, показывает, что периметр постоянен (19,90 см); кривая площади (которую ученики спонтанно принимают за квадратичную параболу) симметрична относительно $\alpha = 90^\circ$ (прямоугольник!), что подтверждается функциональной зависимостью $F = (a_0 \cdot b_0) \cdot \sin \alpha$, которая принадлежит к типу функции $y = k \cdot \sin \alpha$, $k > 0$, $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$.

Пример 3

Каков характер зависимости периметра параллелограмма от угла α при условии, что сторона a и высота остается постоянной?

Симметричный, U-образный по форме, график для периметра (рис. 3) имеет минимум при $\alpha = 90^\circ$ (прямоугольник!). Периметр стремится к бесконечности, если α стремится к 0° или 180° . Получаем функциональную зависимость вида: $u = 2 \left(a_0 + \frac{F_0}{a_0 \cdot \sin \alpha} \right)$, где значение функции становится минимально, когда $\sin \alpha$ в знаменателе максимален, т.е. при $\alpha = 90^\circ$, $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$.

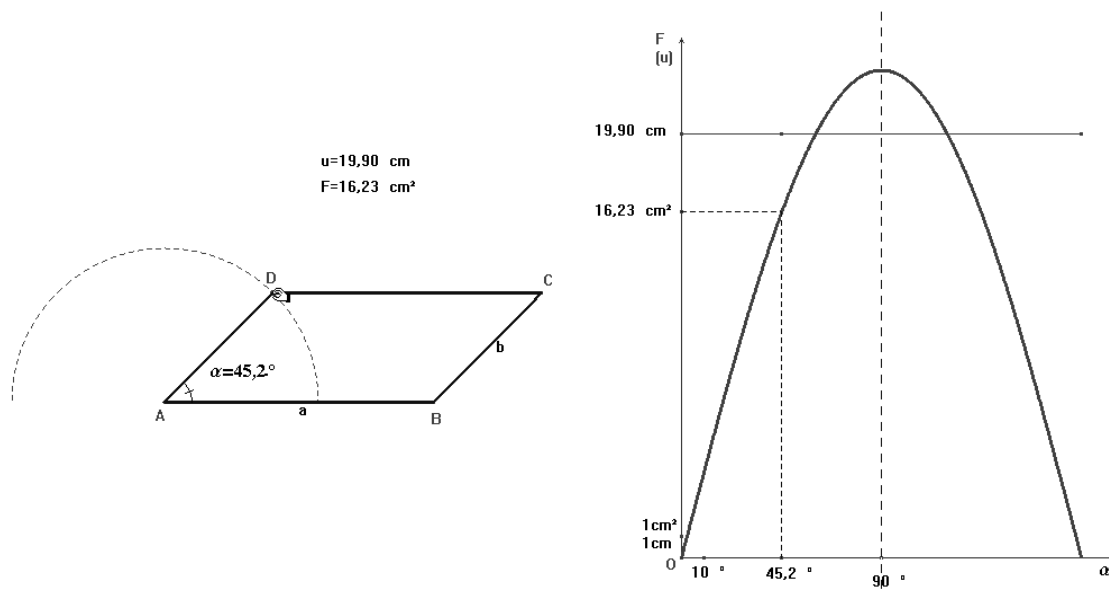


Рис. 2

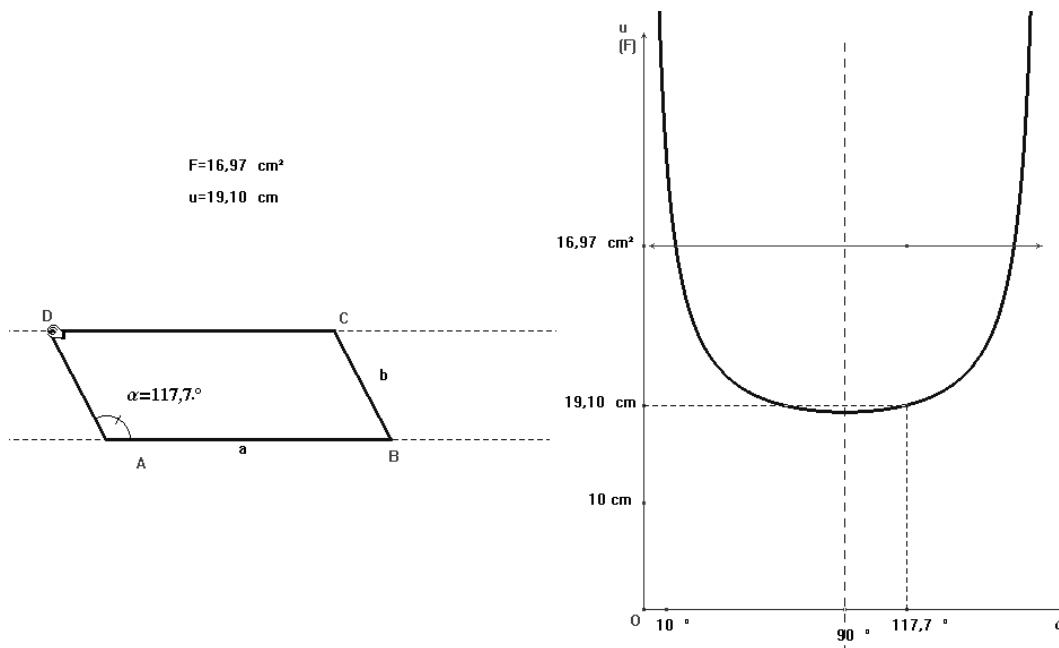


Рис. 3

Пример 4

Как зависит площадь параллелограмма с постоянным периметром и с постоянными углами от длины стороны a ?

Для заданной величины периметра строится параллелограмм, который допускает изменение a . Симметричный график показывает максимум, когда параллелограмм становится - ромбом (рис. 4).

Функциональная зависимость:

$F = \frac{1}{2} \sin \alpha_0 \cdot a \cdot (u_0 - 2a)$. Это квадратичная функция, которая из-за отрицательного коэффициента у a^2 открыта снизу, обращается в нуль при a

Приложение 6

$= 0$ и $a = \frac{U_0}{2}$, и вершина которой находится в точке $\frac{U_0}{4}$ (среднее арифметическое нулевых точек) с максимальным значением $\frac{U_0^2}{16} \sin \alpha_0$. Максимальный по площади среди параллелограммов является ромб с длиной стороны $\frac{U_0}{4}$.

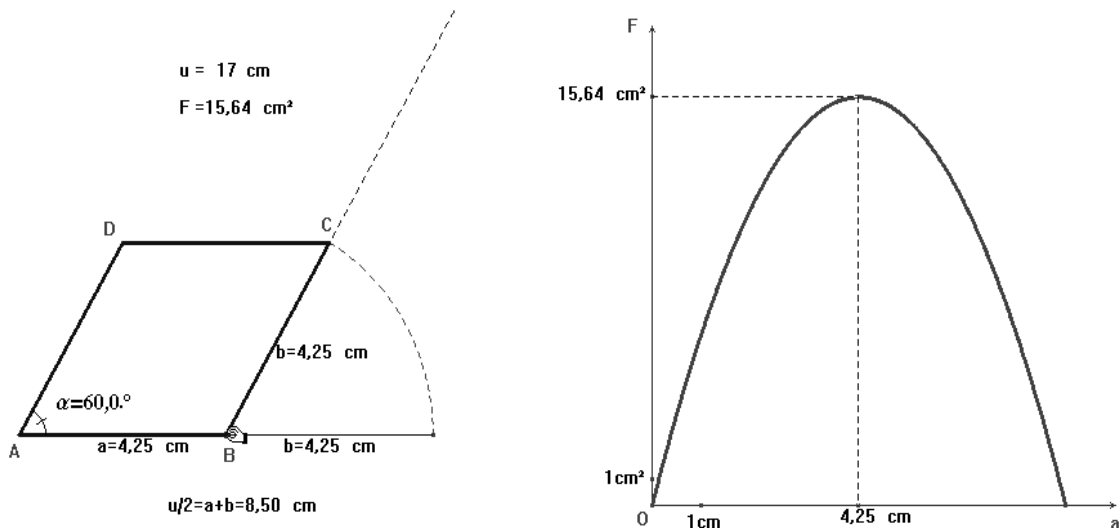


Рис. 4

Пример 5

Как зависит периметр параллелограмма от длины стороны и в случае фиксированной площади и в случае фиксированного угла?

Рисунок 5 показывает приблизительную установку для минимального периметра; параллелограмм тогда, как и в предыдущем примере - ромбовидный. Периметр растет неограниченно при стремлении a к нулю или бесконечности.

Для $F_0 = a \cdot b \cdot \sin \alpha_0$ получаем $u = 2 \left(a + \frac{F_0}{a \cdot \sin \alpha_0} \right)$, где $u(a)$ - дробно-рациональная функция. Чтобы определить максимум для $u(a)$, мы дополняем выражение $u(a)/2$ до полного квадрата:

$$\frac{u(a)}{2} = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{\frac{F_0}{\sin \alpha_0}} + \left(\sqrt{\frac{F_0}{a \cdot \sin \alpha_0}} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{F_0}{\sin \alpha_0}} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{F_0}{a \cdot \sin \alpha_0}} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{F_0}{\sin \alpha_0}}.$$

$u(a)$ становится минимальным, когда квадратичное выражение равно нулю; из этого получается $a = \sqrt{\frac{F_0}{\sin \alpha_0}}$ и $a = b$, это означает, что минимальный по периметру среди параллелограммов - ромб.

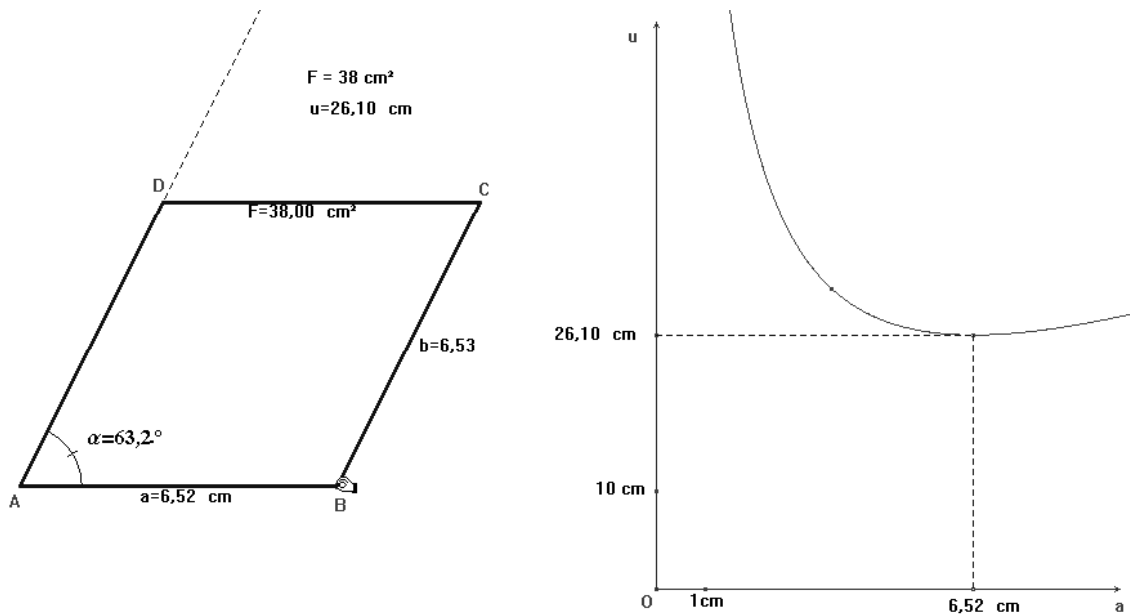


Рис. 5

Пример 6

Как изменяются длины диагоналей параллелограмма в зависимости от угла α , если стороны a и b остаются постоянными?

На рисунке 6 показаны взаимно симметричные графики длин диагоналей e и f , при чем $e=f$ тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником. Функция $e(\alpha)$ строго убывающая, а $f(\alpha)$ строго возрастающая. Абсолютные максимумы и минимумы достигаются на границе при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$. Используя теорему косинусов, получаем:

$$e = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 + 2a_0b_0 \cos \alpha}, f = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 - 2a_0b_0 \cos \alpha}.$$

Пример 7

Как изменяются длины диагоналей параллелограмма в зависимости от угла α , если сторона a и высота постоянны?

На рисунке 7 показаны взаимно симметричные графики длин диагоналей e и f , в которых e или f принимают наименьшее значение, когда \overline{AC} или \overline{BC} ортогональны AB . Если α приближается к нулю или к 180° , то e и f стремятся к бесконечности. Формула для e (аналогично для f) имеет вид:

$$e = \sqrt{a_0^2 + \frac{F_0}{a_0 \cdot \sin \alpha} \left(\frac{F_0}{a_0 \cdot \sin \alpha} + 2 \cdot a_0 \cdot \cos \alpha \right)};$$

минимальное значение e равно $\frac{F_0}{a_0}$, которое достигается при значении угла

$$\alpha = \arctan \left(\frac{F_0}{a_0^2} \right).$$

Приложение 8

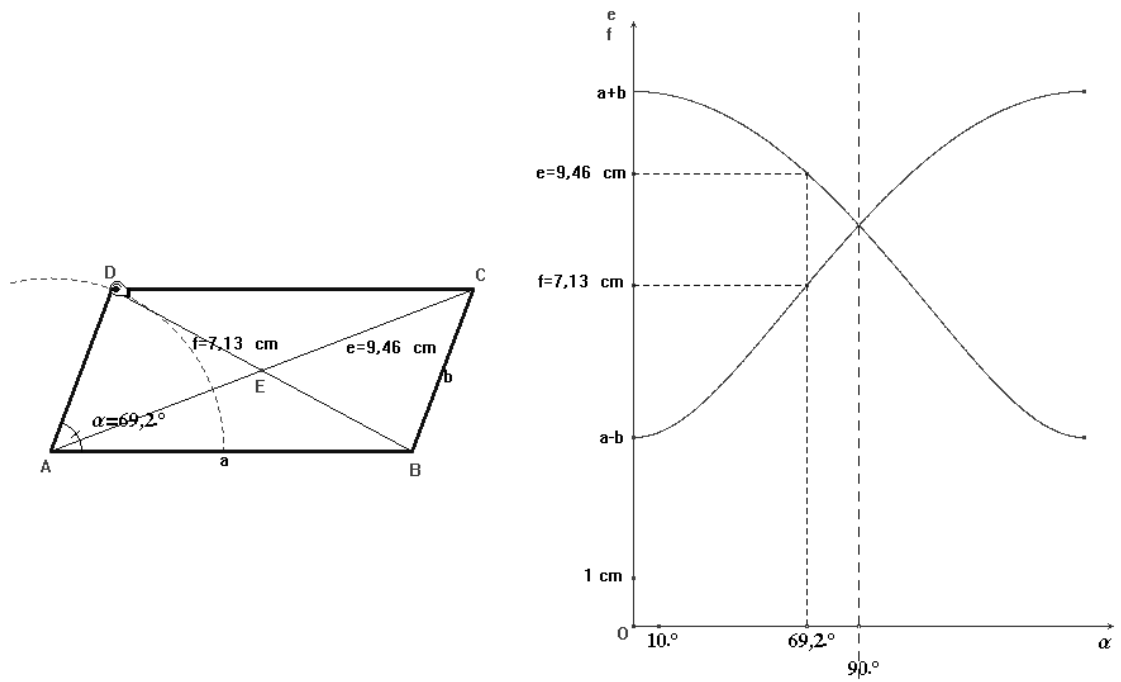


Рис. 6

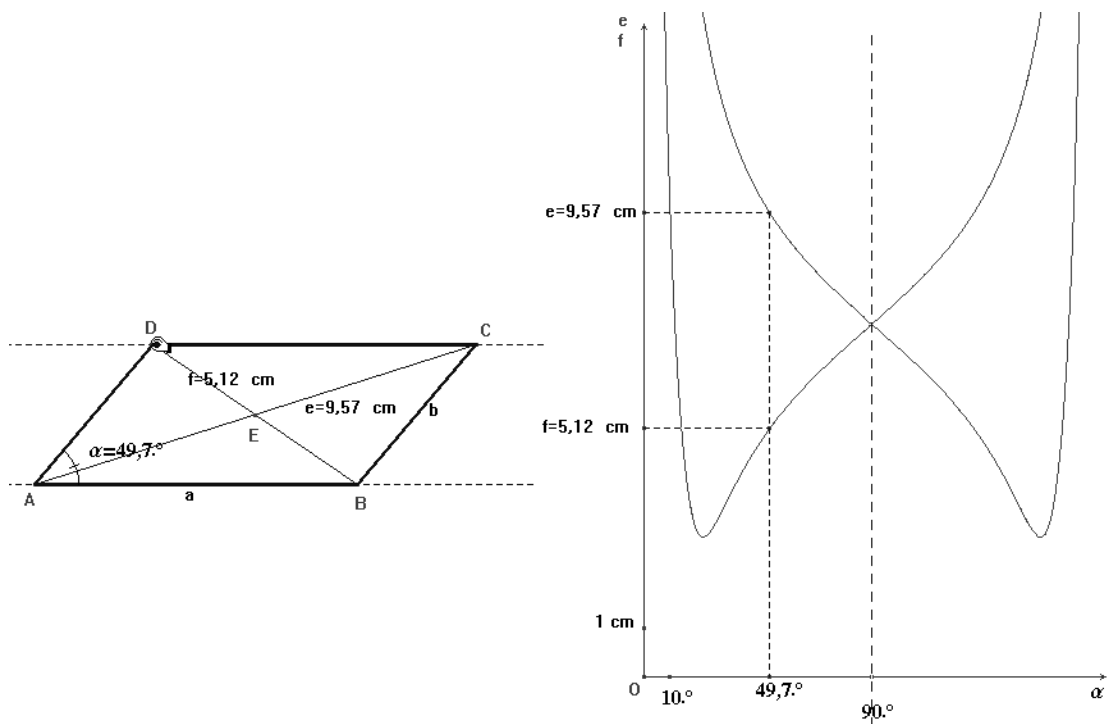


Рис. 7

Пример 8

Как зависит от угла α угол между диагоналями, если стороны параллелограмма остаются постоянными?

Эмпирический график (рисунок 8) симметричен относительно $\alpha = 90^\circ$ (прямоугольник!), где имеет место минимум. Выражение для функции $\varepsilon(\alpha)$ выводится с помощью теоремы косинусов для треугольника ABE.

Имеем $\varepsilon = \arccos\left(\frac{e^2 + f^2 - 4a_0^2}{2 \cdot e \cdot f}\right)$, где выражение для $e(\alpha)$ и $f(\alpha)$ нужно взять из примера 7.

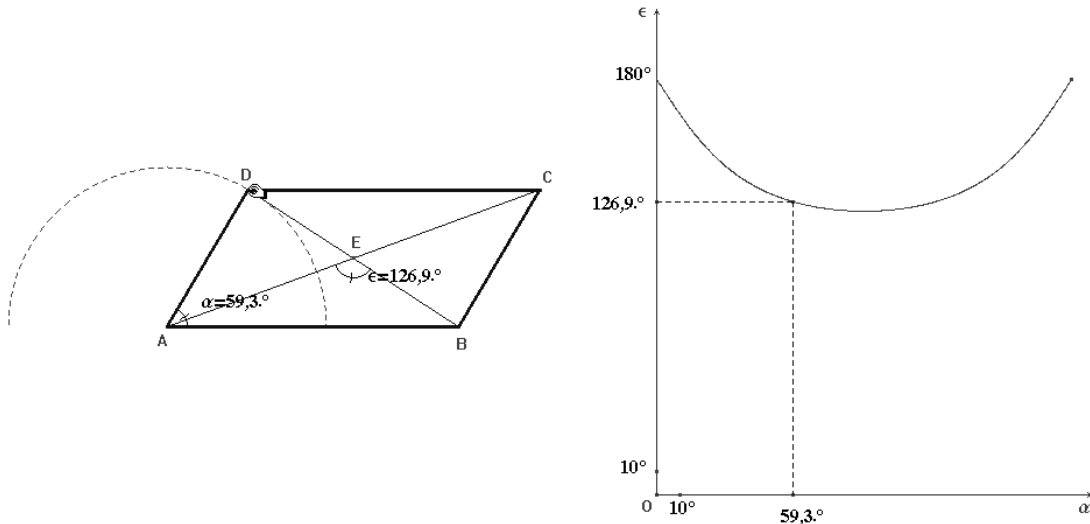


Рис. 8

Пример 9

Как изменяется периметр и площадь параллелограмма при преобразовании подобия в зависимости от отношения измененных сторон к первоначальным их значениям (например, a'/a)?

Рисунок 9 показывает для периметра пропорциональную зависимость. График для площади выглядит как ветвь параболы. Получение выражения функции:

$$u' = 2(a' + b') = 2\left(a' + b \frac{a'}{a}\right) = \frac{a'}{a} 2 \cdot (a + b) = \frac{a'}{a} u_0, \text{ т.е. } u' \text{ прямо}$$

пропорционально $\frac{a'}{a}$;

$$F' = a' \cdot b' \cdot \sin \alpha = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 a \cdot b \cdot \sin \alpha = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \cdot F_0; F' \text{ есть квадратная функция от}$$

$\frac{a'}{a}$. Итак, при преобразовании подобия параллелограмма ABCD, периметр изменяется пропорционально коэффициенту подобия, площадь – пропорционально квадрату коэффициента подобия.

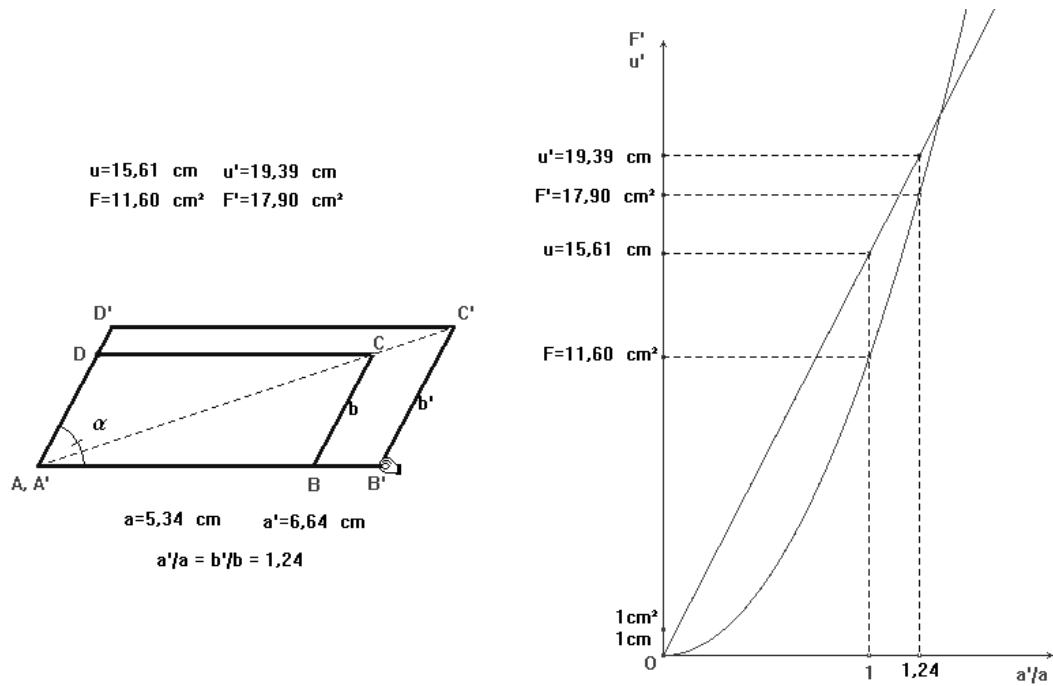


Рис. 9

В приведенных примерах всегда было ясно, как привязывается точка, через перемещение которой изменяется независимая величина. В следующем примере объект, к которому привязывается точка, сначала надо найти.

Пример 10

Как изменяется периметр и площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, на сторонах которого построен подобный параллелограмм $ABCD$ с тем же углом в зависимости от величины угла $\tau = \angle BAV'$?

Величина угла BAV' может изменяться только перемещением луча AV' ; опция построения кривой геометрического места по точкам в данном случае не функционирует, и мы получаем только график как следы точек, которые не соединены (рис 10a).

Чтобы узнать, на какую точку движется V' , мы применяем ее след, который имеет форму круга (рис. 10b). Внешний угол $AB'V$ равен по построению β ; поскольку $\alpha = 180^\circ - \beta$, то получается обычное построение описанного круга вокруг треугольника $AB'V$ (рис. 10c).

V' привязывается на меньшую из дуг AB , и мы получаем соответствующий график на рисунке 10d.

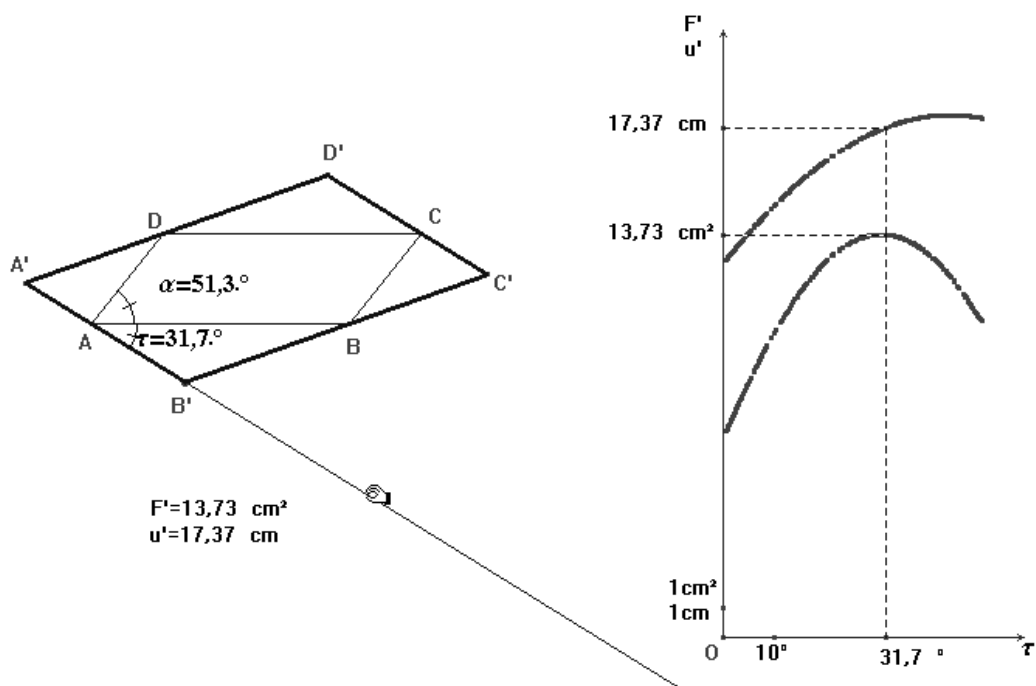


Рис. 10а

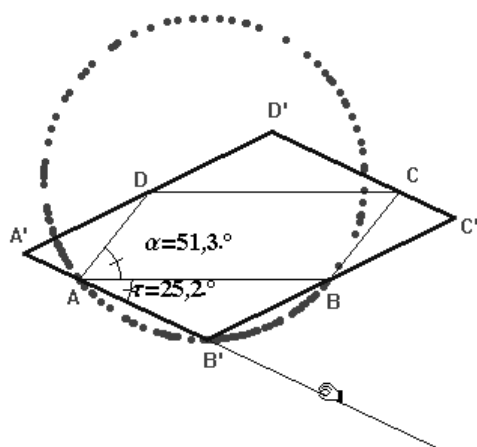


Рис. 10б

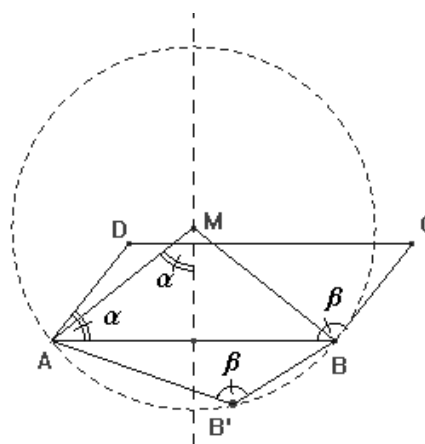


Рис. 10с

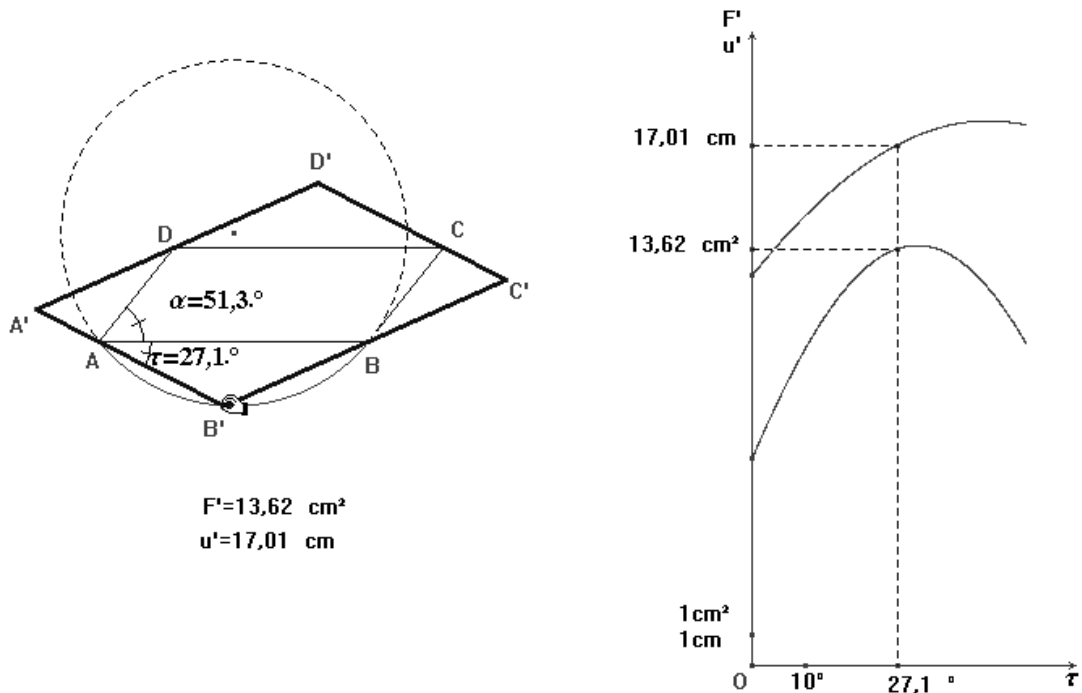


Рис. 10d

Мы завершаем серию задач двумя примерами

Пример 11

Как изменится площадь треугольника, основание которого совпадает со стороной прямоугольника \overline{AB} , причем его вершина может свободно перемещается по ломаной $BCDA$ (рис. 11a) (в зависимости от удачно подобранной величины)?

В качестве независимой величины мы выбираем величину угла $\tau = \angle AMT$ (M : середина \overline{AB}). Эмпирический график состоит из трех частей (рис. 11b): первая – строго возрастающая, вторая - горизонтальная, третья строго убывающая - как и следовало ожидать.

Функция складывается из двух выражений:

$$F_{1(3)} = \frac{a_0^2 \tan \alpha_0 \tan \tau}{4(\tan \alpha_0 \pm \tan \tau)} \text{ для первого и третьего участка;}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} a_0 \cdot b_0 \cdot \sin \alpha_0 \text{ для второго участка (неявный экстремум в виде постоянной площади), при этом для первого участка } \tau \text{ меняется между } 0^\circ \text{ и } \arctan \left(\frac{b_0 \cdot \sin \alpha_0}{a_0 - b_0 \cdot \cos \alpha_0} \right) \text{ и т.д.}$$

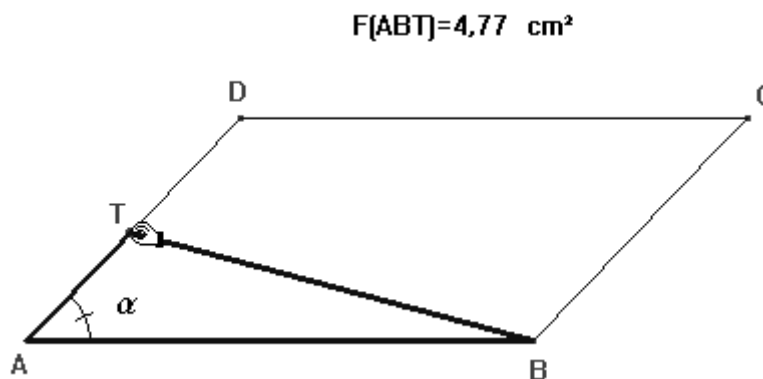


Рис. 11а

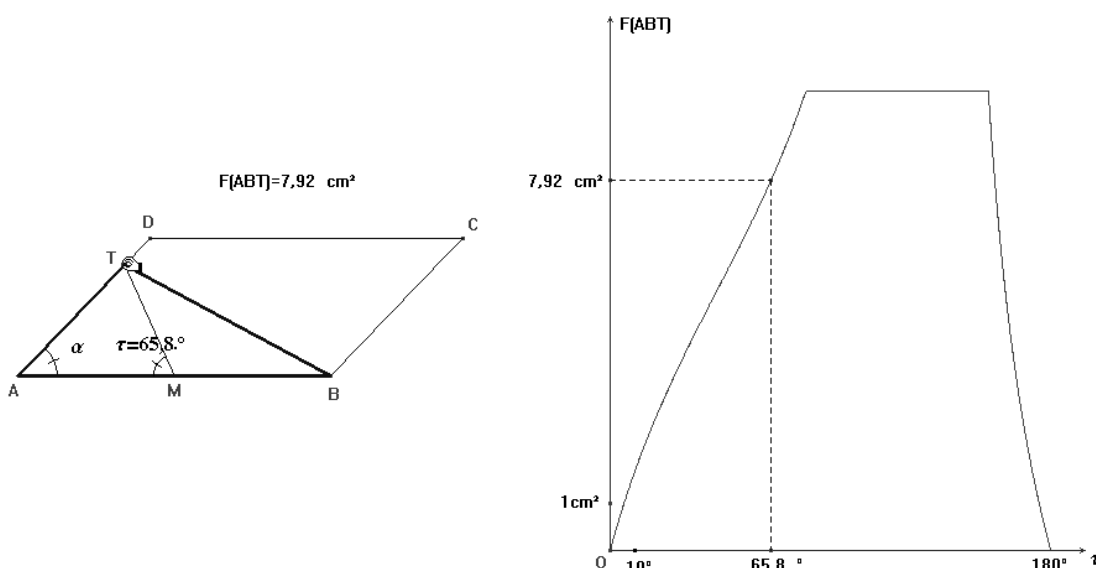


Рис. 11b

Пример 12

Как меняется длина соединяющего отрезка \overline{ST} , соединяющая точку S внутри параллелограмма с точкой на параллелограмме, в зависимости от величины угла τ , который образует луч \overline{ST} с отрезком \overline{SA} ?

Эмпирический график (рис. 12 а; горизонтальный отрезок возникает из-за скачкообразного изменения значения угла от 360° до 0° при переходе через вершину A) показывает согласно ожиданиям четыре участка. При прохождении вершин B, C, D возникают «изломы» (места, в которых функция не дифференцируема); независимо от положения S существует, по меньшей мере, два относительных минимума с горизонтальной касательной и, по меньшей мере, один относительный максимум, в котором нет касательной. Если местоположение точки S определено выбором угла SAB

Приложение 14

и длины \overline{AS} , то длину отрезка можно рассчитать с помощью теорем синуса и косинуса.

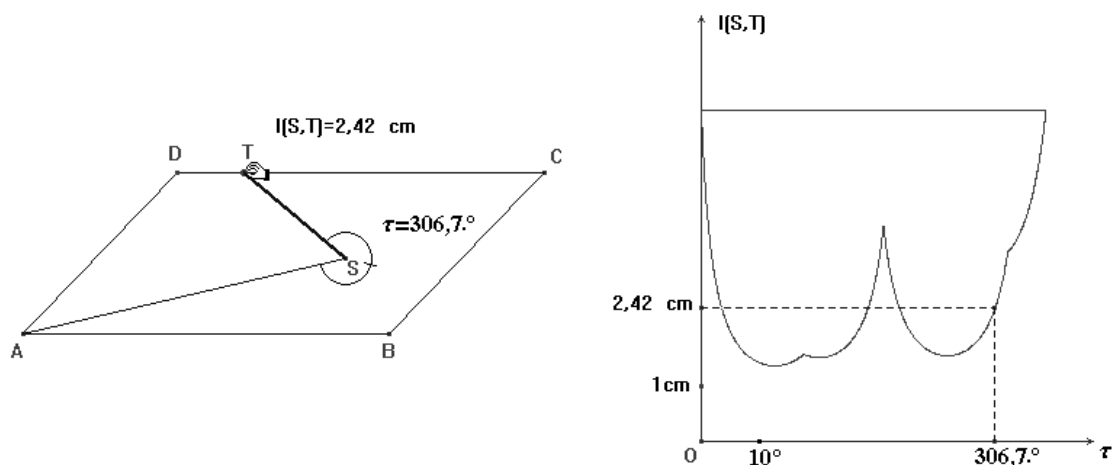


Рис. 12a

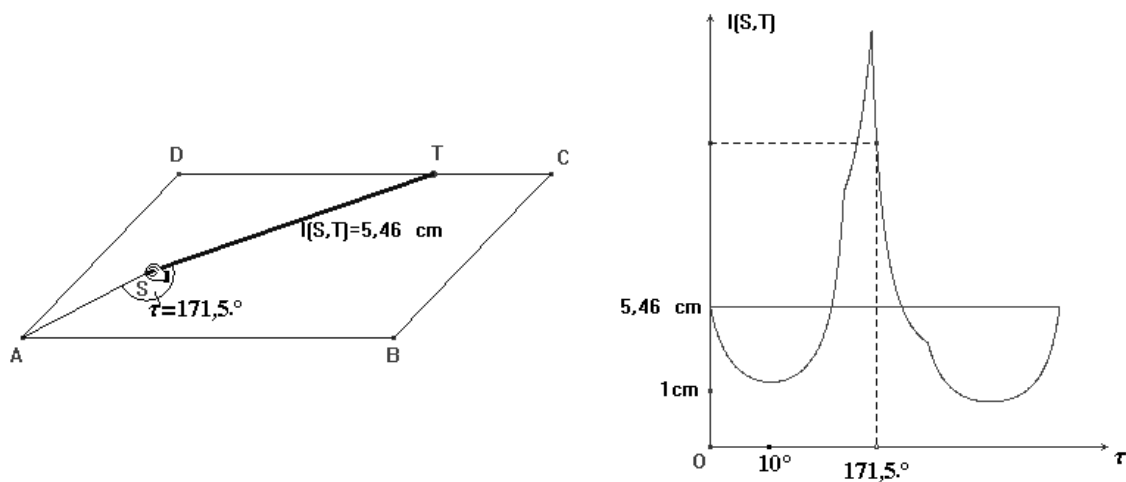


Рис. 12b

При желании читатель может придумать и другие подобные задачи, например, как изменится длина отрезка, который соединяет точки пересечения прямой с прямоугольником, если прямая перемещается параллельно самой себе.

3 Заключительное примечание

Геометрические задачи экстремума на примере параллелограмма привели к интересным функциональным зависимостям. Мы можем создать подобные задачи на исследование функциональных зависимостей и для других геометрических фигур.

4 Список литературы

- Gutzmer, A.: Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten.
In: ZMNU (36), 1905, S. 543 – 553
- Heymann, H.-W.: Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz 1996
- Krüger, K.: Erziehung zum funktionalem Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips.
Dissertation an der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main. 1999
- Laborde, J.-M., Bellemain, F.: Cabri géomètre II. – Université Joseph Fourier. Grenoble, 1994
(Deutsche Bearbeitung von H. Schumann, (Freising, 1996) Texas Instruments
- Mehrtens, H.: Moderne Sprache Mathematik. Frankfurt: Suhrkamp 1990, S. 359
- Schumann, H.: Funktionale Eigenschaften einer geometrischen Figur darstellen und untersuche mit Cabri II im TI-92
In: TI-Nachrichten, 1995, Heft 2, S. 6/7
- Schumann, H.: Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Velten: Reinhardt Becker Verlag. 1994
- Schweiger, F.: Fundamentale Ideen – Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: JMD (13), 1992, S. 199 – 214
- Walsch, W.: „Aufgabenfamilien“. Beispiele und didaktische Anmerkungen. Folge 1/2. In: Mathematik in der Schule (33), 1995, S. 78 – 82, S. 142 – 152.