4 Многообразие методов при изучении задач экстремума в предметной, бумажной и компьютеризированной средах

Много дорог ведет к цели!

4.1 Введение

Сегодня к двум традиционным средам изучения математических объектов необходимо добавить третью компьютеризированную среду, (см. диаграмму).

В рамках преподавания математики можно поставить следующие неразрешенные вопросы:

– Как интегрировать методики преподавания в этих трех средах?
– Как состыковать методики в разных средах?
– Какие преимущества и недостатки несет с собой изучение математических объектов в каждой среде?

Здесь мы только грубо охарактеризуем средо-ориентированые методики.

“Предметное изучение” математических объектов: конструирование обработкой материала (конструирование моделей из различных материалов) (разрезание, разрывание, складывание, сборка, разборка, …; измерение материальных объектов, … (существенная черта: целостное восприятие).

Изучение на бумаге с карандашом: оперирование числовыми, алгебраическими и геометрическими действиями, а именно, вычислением, преобразованием выражений, решением уравнения, построением с помощью циркуля, линейки и транспортира, … (характерный признак: алгоритмические навыки).

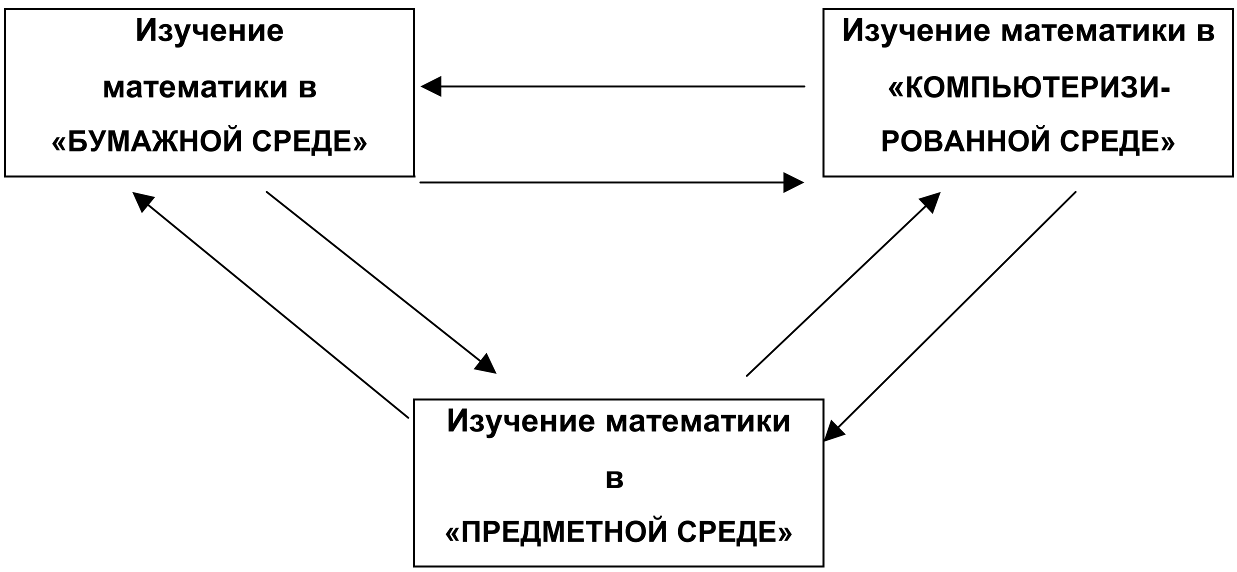


Диаграмма 4.1

Изучение математики в компьютеризированной среде*:*

a) Компьютер как инструмент: применение свойств черного ящика проблемно-ориентированных компьютерных инструментов вместо проработки мелких шагов алгоритмической инструкции (характерный признак: более экономичная и явно экспериментальная работа).
b) В рамках компьютеризированной среды: интерактивное обучение направлено на узкоограниченные области знаний (характерный признак: привязка к определенному дизайну программы; нерешенная проблема: применение и обработка данных самими школьниками).

На примере следующих геометрических задач экстремума мы попытаемся разъяснить взаимодействие различных подходов в преподавании математики в основной школе.

Задача экстремума[1]: исследуй объем конуса, у которого дана только образующая, на предмет существования максимума. Или: какой должен быть угол кругового сектора как плоской развертки конуса, чтобы изготовить конус наибольшей емкости (объема)?

Ниже мы приводим для решения этой задачи различные методы, которые в заключительной части этой работы будут обсуждены. Только использование компьютерных инструментов открывает настоящее многообразие методов. (Выбор используемых компьютерных инструментов обусловлен субъективным опытом автора.)

Элементарные методы преподавания основываются на математическом приеме, известные школьникам 9 класса (теорема Пифагора!).

4.2 Решение одной задачи экстремума несколькими методами

Мы начинаем наши рассуждения о методах (преимущественно экспериментальных) решения специальной задачи экстремума и закончим возможностями решения общих задач.

4.2.1 “От бумажной модели к электронным таблицам”

Задача:

[1] Эта задача и ее методика решения в разных средах, включая комьютеризированную среду, в Латвии была разработана Т.Романовским (см. Т.Романовскис. Компьютер в школе. «Звайгзне». Рига, 1985).

a) Начерти круг радиусом 10 см. Вырежи его и надрежь его вдоль радиуса AB (рис. 4.1a). Сверни из кругового диска боковую поверхность конуса с вершиной A, с направляющей вдоль радиуса до точки B (рис. 4.1b; воспользуйся скрепкой, чтобы зафиксировать фигуру).

b) Измерь с помощью линейки соответствующие диаметры в плоскости основания конуса для различных боковых поверхностей с образующей m=10см.

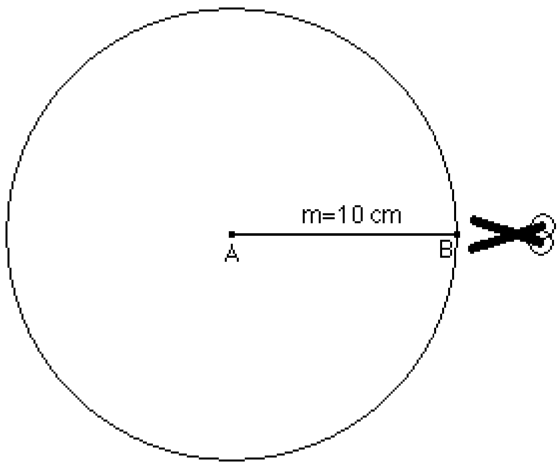


Рис. 4.1a

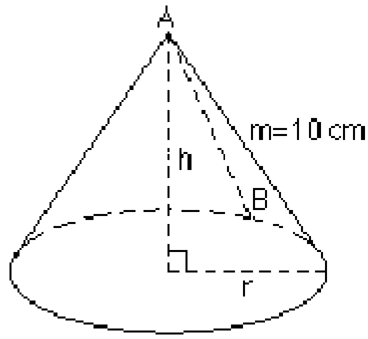


Рис. 4.1b

Измерь также высоту соответствующего конуса (лучше всего зажми конус горизонтально между двумя книжными опорами). Зная радиус r и высоту h конуса, вычисли его объем. Используй калькулятор для расчета, значения внеси в таблицу. - Можешь ли выразить объем различных конусов? (Подумай, например, о том, какие свойства должны быть у наполненного фильтра для кофе в виде конуса или конусообразного бокала для шампанского.)

c) Используй электронную таблицу (например, EXCEL или же WORKS). Составь таблицу из трех столбцов с заголовком: радиус r (см), высота h (см) и объем V (cm^3). В первый столбец введи данные для радиуса от 0 до 10 (см) с шагом 1; введи формулы для расчета высоты и объема во вторую строку таблицы и скопируй их вниз.

Как ты думаешь, между какими значениями радиуса находится наибольшее значение объема?

Уменьшай шаг до 0,5 до тех пор, пока ты не определишь для какого радиуса (два знака после запятой), объем конуса будет наибольшим. После этого ты можешь таким же способом определить наибольший объем для другой образующей (например, m=15 cm).

4.2.2 С помощью программ построения графиков функций

Из $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ следует с $h^2 = m^2 - r^2$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{m^2 - r^2},$$

для m = 10(cm) получаем

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{10^2 - r^2}.$$

С помощью программы DERIVE можно построить график функции для объема V в зависимости от r (рис. 4.2). Мы перемещаем курсор графика в максимальную точку графика и определяем координаты позиции курсора. Тем самым мы получаем приближенное значение для места экстремума и значение максимума. Изменение длины направляющей дает соответствующее приближенное решение.

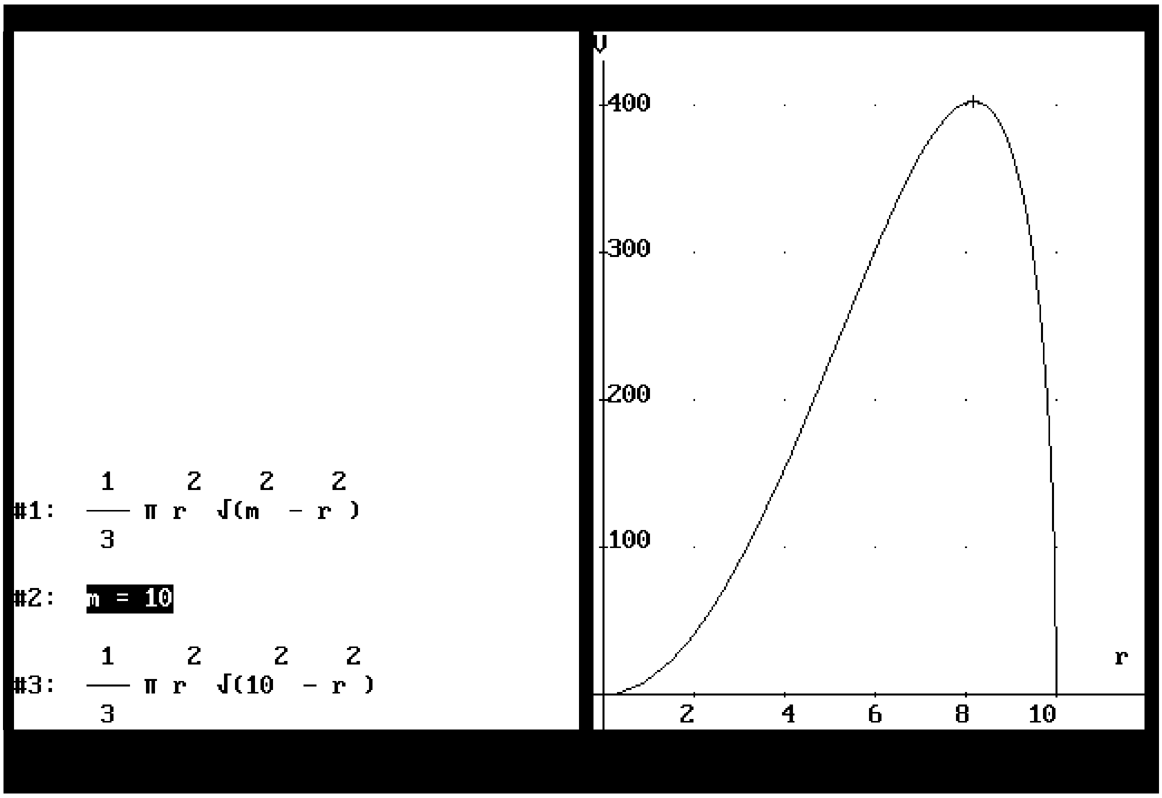


Рис. 4.2

4.2.3 Непосредственная манипуляция на интерактивном рабочем листе

Интерактивный рабочий лист (рис. 4.3) создан в Cabri Géometre II; в рабочий лист могут быть включены различные дополнительные инструменты, например, таблица, система координат (первый квадрант) с трассирующей точкой.

<u>Задание</u>: измени величину кругового сектора (развертка конуса с образующей m=10см), перемещая точку Z. Наблюдай при этом изменение объема конуса.

Ты можешь также вывести на печатающее устройство различные круговые секторы, вырезать развертки и изготовить конус.

Исследуй, как зависит объем от угла центрального кругового сектора.

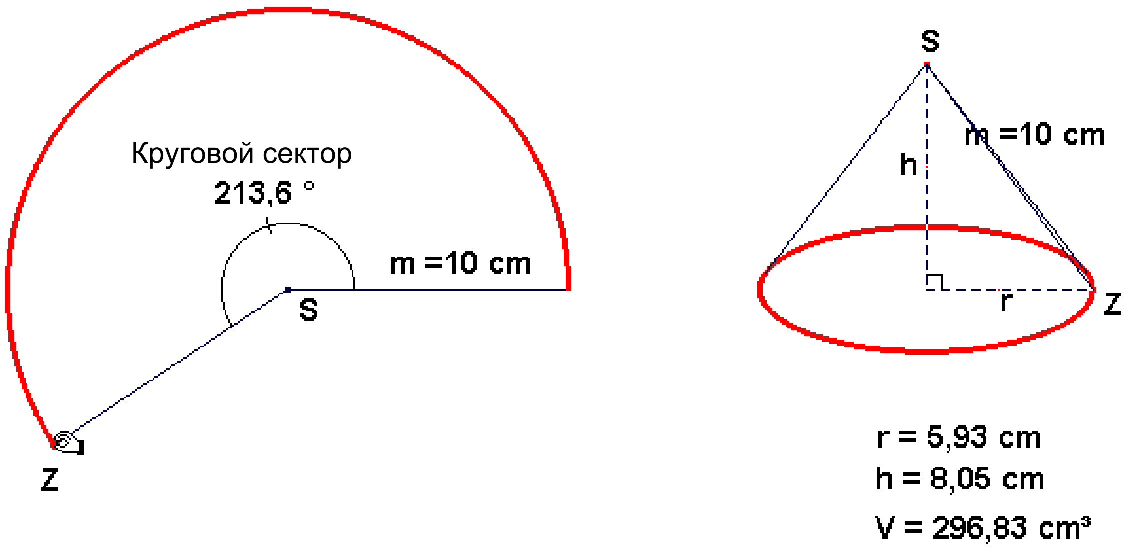
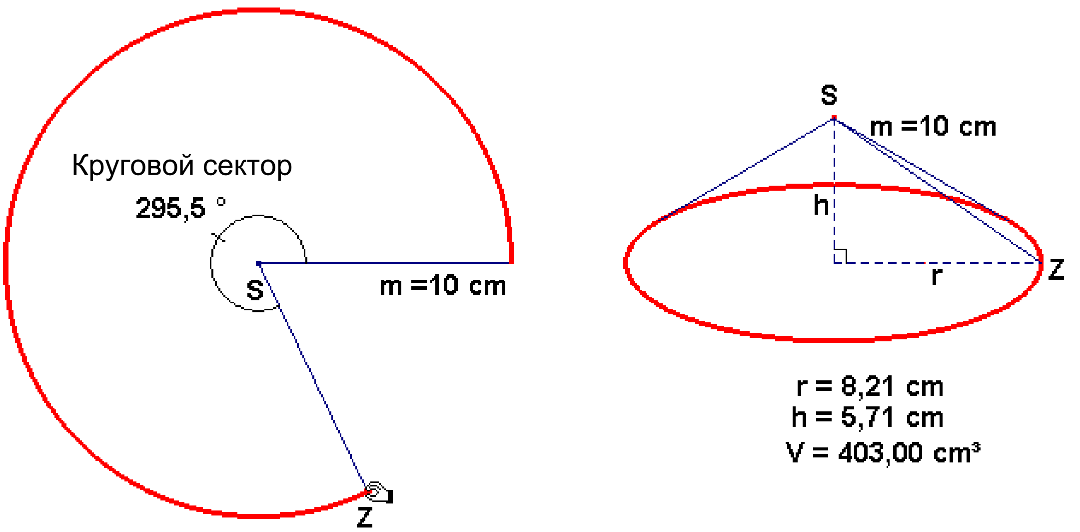


Рис. 4.3

Для лучшего обозрения влияния угла кругового сектора на объем конуса, данные измерений можно внести в таблицу (рис. 4.4). График наглядно показывает зависимость объема от величины центрального угла; из него можно “на глаз” найти приближенное решение (рис.4.5). При изменении длин образующей m можно установить, что угол кругового сектора в заготовке инвариантен для максимума объема, т.е. не зависит от величины m. (рис 4.6).



	Zentriwir	r =	h =	V =
1	41.1	1.14	9.93	13.56
2	52.2	1.45	9.89	21.78
3	78.9	2.19	9.76	49.13
4	104.7	2.91	9.57	84.79
5	131.7	3.66	9.31	130.52
6	169.1	4.70	8.83	203.94
7	195.4	5.43	8.40	259.04
8	210.9	5.86	8.10	291.25
9	248.1	6.89	7.25	360.34
10	291.8	8.10	5.86	402.94
11	314.7	8.74	4.86	388.65
12	339.0	9.42	3.36	312.47
13	295.5	8.21	5.71	403.00

Рис. 4.4

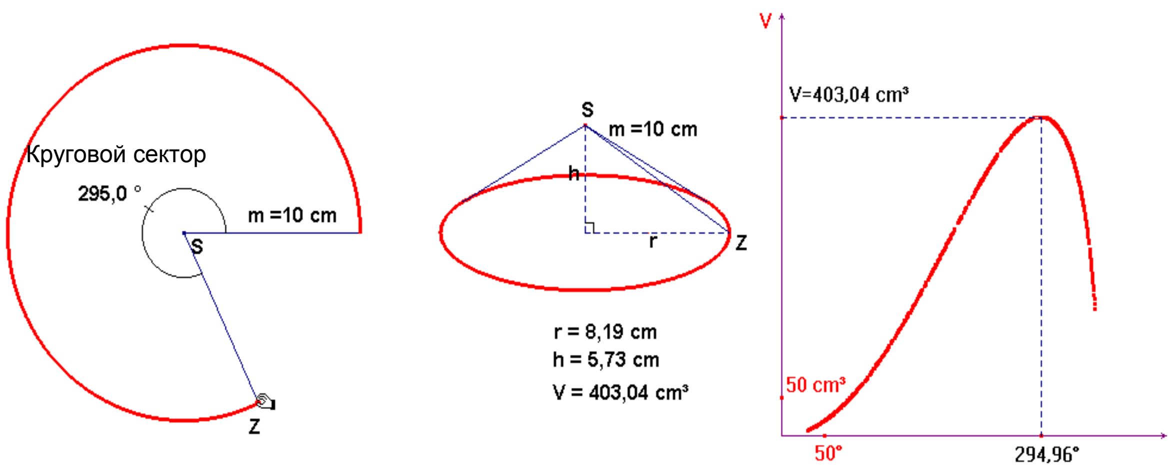


Рис. 4.5

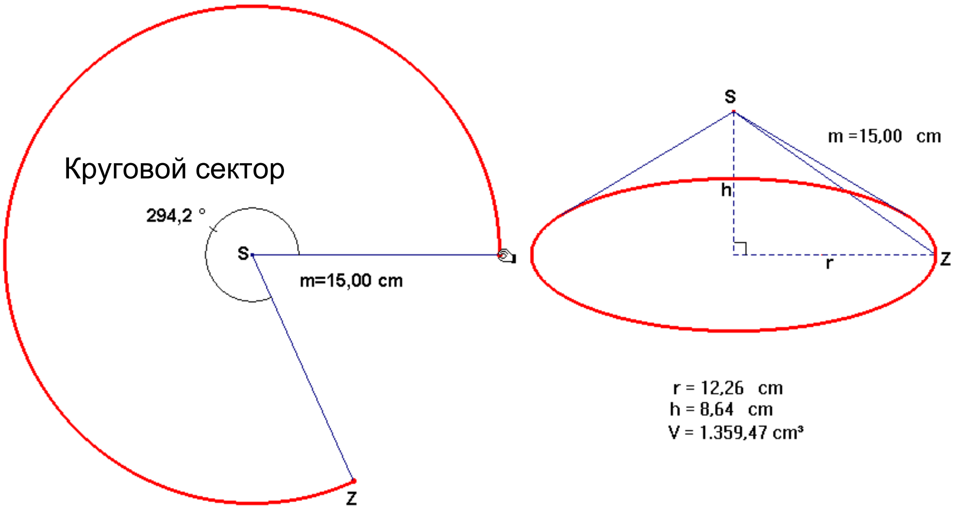


Рис. 4.6

4.2.3 Методика с вычисляющим «черным ящиком» в компьютеризированной среде

В системе компьютерной алгебры MATHEMATICA для решения специальных задач экстремума функций одной действительной переменной имеется команда "Find Minimum" (найди минимум), которая, например, для всех $x \geq x_0$ рассчитывает места абсолютного минимума и их значения. Так как мы ищем максимум для $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{10^2 - r^2}$, то на печать выводим обратное значение, и для $r \geq 1$ получаем решение, которое показано в листинге 4.1a (чтобы получить значение для максимума, нужно вычислить обратное значение для минимума). Для подарочного кулечка со сладостями[2] m=60 (см) получается конус необычно

большой емкости для первоклассника (Листинг 4.1b)

$$\text{FindMinimum}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{3} * \pi * r^2 * \sqrt{10^2 - r^2}\right)}, \{r, 1\}\right]$$

{0.00248098, {r → 8.16487}}

1 / 0.00248098

403.067

Листинг 4.1a

$$\text{FindMinimum}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{3} * \pi * r^2 * \sqrt{60^2 - r^2}\right)}, \{r, 1\}\right]$$

{0.00001149, {r -> 48.49769}}

1 / 0.00001149

87032.202

Листинг 4.1b

[2] В Германии дети при поступлении в школу получают подарок в виде большого свернутого из бумаги конуса со сладостями.

4.2.4. “Ручная алгебра”

После возведения в квадрат V= $\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{m^2-r^2}$ получается целочисленное рациональное выражение $V^2 = (\frac{1}{3}\pi)^2 \cdot r^4\ (m^2-r^2)$. Для m=10 мы устанавливаем, что $V^2(r)$ имеет максимум в том же месте что и V(r) (рис. 4.7 a/b). Итак, мы можем определить место максимума для V(r), найдя его для $V^2(r)$.

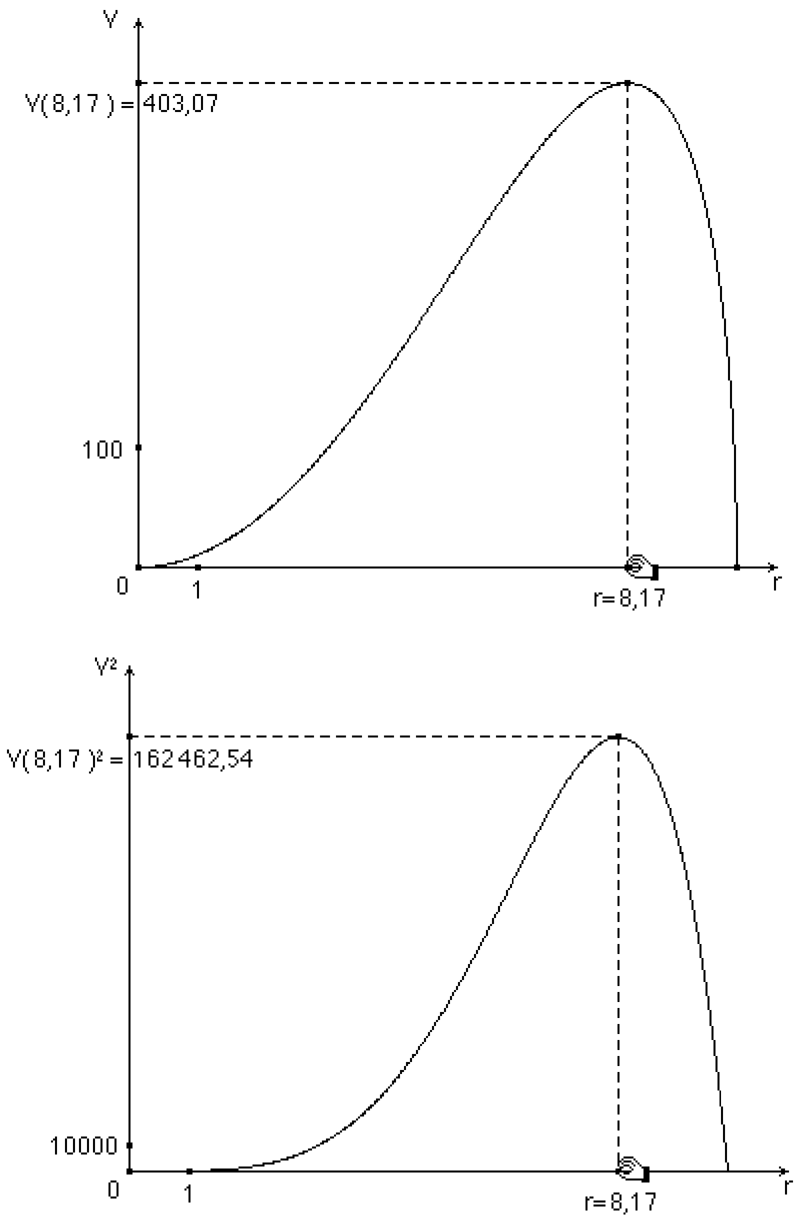


Рис. 4.7a/b

Выполняем преобразование так, чтобы на правой стороне получилось произведение двух сомножителей, сумма которых постоянна. (Здесь мы используем то, что произведение трех положительных сомножителей, сумма которых постоянна, максимальна в том случае, если сомножители равны.

$$\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^2 = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\left(m^2-r^2\right)$$, при этом $\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+m^2-r^2=m^2$ (константа).

Произведение $\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\left(m^2-r^2\right)$ становится наибольшим при $\frac{r^2}{2}=m^2-r^2$, т.е. для $r^2=\frac{2}{3}m^2$, откуда следует $r_{max}=\frac{\sqrt{6}}{3}m$ и $h_{max}=\frac{\sqrt{3}}{3}m$ (для m=10 см: $r_{max}\approx$ 8,16 см, $h_{max}\approx$ 5,77 см) и отношение $r_{max}: h_{max}=\sqrt{2}:1$, т.е. r_{max} и h_{max} находятся в равных пропорциях как длина к ширине листа бумаги формата А4[3] (рис. 4.8; срез конуса максимального объема). Для максимального объема имеем:

$V_{max} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{m}{3}\right)^3$ (для m=10: $V_{max}\approx$ 403,07 см³).

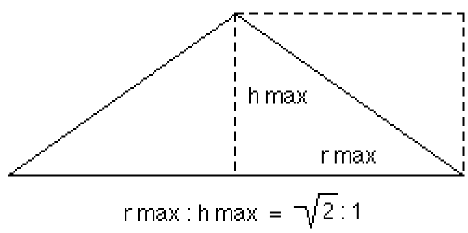


Рис. 4.8

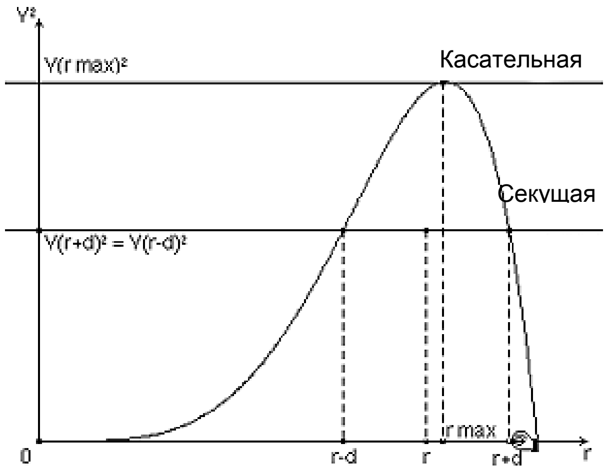
Угол кругового сектора развернутой поверхности конуса определяется из равенства $\frac{\alpha_{max}}{360°}=\frac{2\pi\ \ r_{max}}{2\pi\ \ m}$: $\alpha_{max}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 360° 293,94° (Дополняющий α_{max} угол составляет около 66°; сектор с таким углом надо вырезать из круга независимо от радиуса, чтобы получить развертку конуса с максимальной емкостью.)

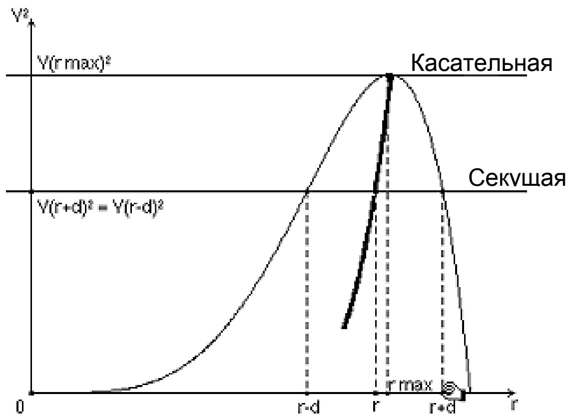
4.2.3 Использование программ компьютерной алгебры

Мы применим для $V(r)^2$ метод конечных разностей для определения места максимума: в граничном положении горизонтальная секущая переходит в касательную в точке экстремума (рис. 4.9). Следовательно, $V(r-d)^2=V^2(r-d)^2$ или $V(r+d)^2-V(r-d)^2=0$; это уравнение конечных разностей может быть преобразовано к виду, который в результате подстановки d=0 дает

[3] Формат бумаги, при котором прямоугольный лист бумаги при складывании пополам, имеет то же отношение сторон, что и начальный лист, возможет только при отношении сторон √2:1. Его придумал и внедрил в практику рижанин, лауреат Нобелевской премии по химии В.Оствальд.

уравнение для определения r_{max}. Для упрощения преобразования и решения мы применяем систему компьютерной алгебры DERIVE (см. листинг 4.2).





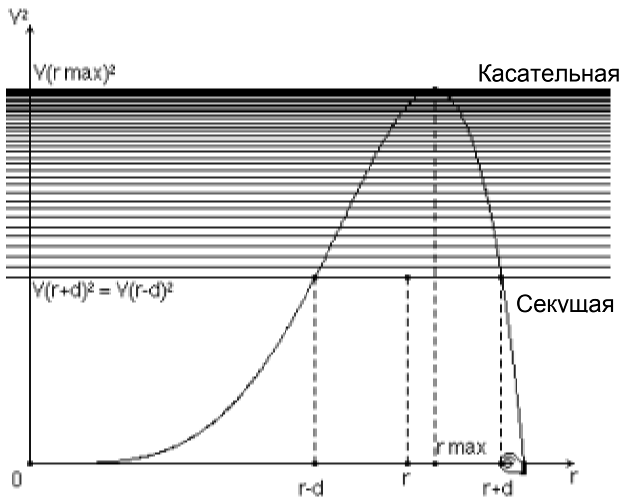


Рис. 4.9, Рис. 4.10 a, Рис. 10.b

#1: "Формула объема конуса:"

#2: V = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

#3: "Соотношение между образующей, радиусом и высотой:"

#4: $m^2 = r^2 + h^2$

#5: "Решение относительно h:"

#6: $h = \sqrt{(m^2 - r^2)}$

#7: "Подстановка h в формулу объема:"

#8: V = $\frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\left(m^2 - r^2\right)}$

#9: "Целевая функция:"

#10: V (r): = $\frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\left(m^2 - r^2\right)}$

#11: "Применение метода конечных разностей для $V(r)^2$:"

#12: $V(r + d)^2 - V(r - d)^2 = 0$

#13: $-\frac{4\pi^2 d r \left(3d^4 + 2d^2\left(5r^2 - m^2\right) - r^2\left(2m^2 - 3r^2\right)\right)}{9} = 0$

#14: "Получение существенного уравнения:"

#15: $3d^4 + 2\,d^2\,(5\,r^2 - m^2) - r^2\,(2\,m^2 - 3\,r^2) = 0$

#16: "Приравниваем d к нулю:"

#17: $3\,0^4 + 2\,0^2\,(5\,r^2 - m^2) - r^2\,(2\,m^2 - 3\,r^2) = 0$

#18: $r^2\,(3\,r^2 - 2\,m^2) = 0$

#19: "Решение относительно r:"

#20: r = 0

#21: r = $\frac{\sqrt{6}\cdot m}{3}$

#22: "Радиус для максимального объема:"

#23: rmax = $\frac{\sqrt{6}\cdot m}{3}$

#24: $m^2 = \left[\frac{\sqrt{6}\cdot m}{3}\right]^2 + h^2$

#25: h = $\frac{\sqrt{3}\cdot m}{3}$

#26: hmax = $\frac{\sqrt{3}\cdot m}{3}$

#27: "Максимальный объем:"

#28: Vmax = $\frac{1}{3}\pi\left[\frac{\sqrt{6}\cdot m}{3}\right]^2 \frac{\sqrt{3}\cdot m}{3}$

#29: Vmax = $\frac{2\sqrt{3}\cdot\pi\cdot m^3}{27}$

#30: "Максимальный центральный угол:"

#31: $\frac{\alpha}{360} = \frac{b}{2\pi m}$

#32: b: = 2 π rmax

#33: $\frac{\alpha}{360} = \frac{r\max}{m}$

#34: $\alpha = \frac{360\ r\max}{m}$

#35: $\alpha = \frac{360\frac{\sqrt{6}\cdot m}{3}}{m}$

#36: $\alpha = 120\sqrt{6}$

Листинг 4.2

4.3 Обсуждение методов изложения

Первый метод “*От бумажной модели к электронным таблицам*” (4.2.1) основывается на изучении конуса с помощью развертки (круговой сектор с разрезом по радиусу) при изменении угла образующей. Измерения параметров конуса (диаметр, высота) и вычисления объема с помощью калькулятора позволяет определить существование оптимального объема (при этом данные должны быть внесены в таблицу). Этот метод можно использовать уже в более ранних классах, нежели в девятом, если формулу объема конуса взять как готовую (проблематичное значение π имеется на калькуляторе). Этот метод решения является очень продолжительным по времени и неточным (из-за получения необходимых измеряемых данных), но он способствует пространственному восприятию и пониманию задачи (например, диапазон изменения радиуса). Следующий метод с применением электронных таблиц предполагает, среди прочего, использование теоремы Пифагора (9 класс) и умения в использовании программных средств, которые могут использоваться не только для математических задач. Применение этого метода мотивировано слабыми сторонами прежнего метода. Преимуществом же является возможность получения результата для разных длин образующей. Легко получаемое графическое представление данных (радиуса, объема) в электронных таблицах в виде столбиков следует рассматривать, скорее всего, как оспариваемую возможность.

Использование *программ построения графиков функций (4.2.2)* позволяет найти для точек экстремума только приближенное значение его места и значения. Но этот метод является предпочтительным, так как он делает наглядным функциональную зависимость объема от радиуса конуса или угла кругового сектора развертки конуса. Разумеется, для этого необходимы умения в получении графического представления (в DERIVE: умения ввести выражения строке редактора, умения изменить установки для системы координат, включая обозначения осей). - Для построения семейства кривых $r \to \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{(m^2 - r^2)}$ с параметром m, например для m от 1 до 15 с шагом 1, в основной школе DERIVE нельзя рекомендовать использовать команду VECTOR ($\frac{1}{3}\pi$ r^2 $\sqrt{}(m^2-r^2)$, m, 1, 15,1) из-за его абстрактного характера; для этого следует отдать предпочтение другим программам построения графиков семейства функций (например, Turboplot).

Компьютерная учебная среда в виде *“Интерактивного рабочего листка” (4.2.3)* не требует высокого уровня умений в использовании компьютерных инструментов. Благодаря возможности прямых манипуляций интерактивные рабочие листы создают основу для мотивирующей, эффективной и экономичной по времени платформы решения одной специальных задач экстремума. Стыковку с предметной средой можно обеспечить выводом на печатающее устройство круговых секторов как развертки конуса. Особенно следует выделить возможность прямого изменения длины образующей (радиуса кругового сектора развертки) для определения инвариантности (независимости от длины образующей) центрального угла развертки конуса с максимальным объемом. Недостаток этого метода изучения оптимального конуса состоит в том, что формула объема и соответствующее применение теоремы Пифагора “спрятано” за поверхностью рабочего листка. Но через постановку вопроса: Как сделан рабочий лист? – можно внести ясность.

Автоматическое *компьютерно-числовое (численное) решение (4.2.4)* может быть продемонстрировано во всех случаях, так как командно-ориентированная программа MATHEMATICA не приспособлена для такого вида локального и интерактивного использования в рамках уроков математики в основной школе. (Алгоритм оптимизации можно проанализировать в старших классах средней школе.) Во всяком случае, ученики узнают мощь численных методов таких систем.

О решении общих задач

Все рассмотренные решения являются решениями специальных задач экстремума. Нас интересует решение общих задач экстремума, так как только они в виде формул охватывают все специальные решения и позволяют производить необходимые определения и находить соотношения между оптимальной формой и определяющими его величинами. Переход к методам решения общих задач экстремума является необходимым. Однако должны применяться такие методы решения, которые годны для уроков математик, и которые обходятся без метода дифференциального исчисления:

Решение «вручную» (4.2.5) основывается на теореме: среди произведений с положительными сомножителями, сумма которых постоянна, только произведение равных сомножителей дает максимальное значение. Уже из-за нехватки времени в основной школе следует использовать эту теорему. Вывод о том, что неотрицательный член T(x) имеет экстремум в x_m одновременно с $T(x)^2$, возможно показать графически. «Ручное» решение не алгоритмизируется, так как оно редко ведет к успеху для других задач экстремума. – «Ручной» метод не приемлем в силу эвристического процесса для автоматизации с помощью компьютерной алгебры!

Дифференциальный метод Шелбьаха (1860) предоставляет в распоряжение элементарную методику нахождения мест экстремума (в случае уверенности в существовании экстремума). Этот метод может быть алгоритмизирован для рациональных функций и тех функций, которые через действия, которые не меняют местонахождение экстремума (например, возведение в квадрат неотрицательной функции) могут быть сведены к рациональным функциям. – Равенство значения функции в точках пересечения горизонтальной секущей с графиком функции и алгебраический смысл граничного положения секущей, очевидно. Решение с помощью DERIVE экономит большое количество алгебраических преобразований и шагов решения, которые при ручном методе скорее могут отпугнуть от поиска решения. Необходимый для этого уровень умений использовать DERIVE довольно высок, который нельзя приобрести, эпизодически пользуясь DERIVE.

Резюме:

Чтобы использовать многообразие методов, которое вызвано применением компьютерных инструментов, их надо более или менее хорошо освоить. С одной стороны, существующая учебная программа уже не может по времени выполнить эти предпосылки, а с другой стороны, нельзя от учеников требовать владение разными программными средами. Итак, имеются проблемы как в улучшении интеграции использования компьютера в преподавании математики, так и в разработке удобного модульного, многофункционального и адаптивного компьютерного программного обеспечения для уроков математики основной школы, пользовательские навыки работы в которых можно развивать в долгосрочном учебном процессе, приспосабливаясь к растущим от класса к классу математическим темам.

В таком аспекте “оптимальным решением” для многообразия методов в компьютеризированной среде остаются следующие варианты: трактовка специальных задач экстремума по методу 4.2.1 “От бумажной модели к электронным таблицам” с последующим «ручным» решением общих задач экстремума по методу 4.2.5 (изучение с “минимальным” применением компьютера).

Изучение специальных задач экстремума с помощью непосредственных манипуляция на интерактивном рабочем листе по методу 4.2.3 и решения с помощью компьютера общих задач экстремума методом конечных разностей 4.2.6 (“максимальное” использование компьютера).

- Разве не имеют учащиеся право узнать, как один математический объект может быть изучен многообразными компьютерными методами?

4.5 Список литературы

Laborde, J.M.; Bellemain, F. (1996): Cabri Géomètre II. Windows- und DOS-Version 1.0 – Dallas/USA u. Freising: Texas Instruments. (Deutsche Oberfläche und Bearbeitung des Handbuchs von H. Schumann)

Schellbach, K.H. (1860): Mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin: Reimer

Schumann, H. (1994): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. – Velten: Becker

Schumann, H. (1998a): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. – In: Mathematik in der Schule 36(10), S. 562-569

Schumann, H. (1998b): Geometrische Extremwertaufgaben in dynamischer Behandlung. – In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 30(6), S. 215-223

Schumann, H. (1999): Computerunterstütztes Entdecken und Lösen geometrischer Extremwertaufgaben in der Sekundarstufe I. In: Mathematik in der Schule 37(2), S. 110-117

Schumann, H. (1999): Methodenvariation mittels dynamischer Geometrie – exemplarisch. In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 31(4), S. 121-132

Метод Шельбаха (1804 - 1892)

Hat man hingegen bei einer graphischen Darstellung die Funktion in Gestalt einer Curve:

$$y = M(x),$$

so schneidet in der Nähe ihrer höchsten und niedrigsten Punkte eine zur x-Axe gezogene Parallele die Curve in zwei Punkten, welche um so mehr zusammenrücken, je mehr sich die Sehne den ersteren Punkten nähert, und schließlich, im Maximum oder Minimum selbst, zusammenfallen. Aus diesen Eigenschaften nun folgt unmittelbar die Methode, die wir zur Aufsuchung dieser ausgezeichneten Werthe einer Funktion anwenden müssen.

Ist nämlich x irgend ein Werth der unabhängig Veränderlichen, in der Nähe des dem Maximum entsprechenden, so giebt es nach den obigen Betrachtungen immer ein x_1, für welches

$$M(x) = M(x_1) \text{ oder}$$
$$M(x) - M(x_1) = 0.$$

wird. Ordnet man diese Gleichung, indem man die entsprechenden Glieder mit x und x_1 zusammenstellt, so läßt sich aus jedem so erhaltenen Gliederpaare, das sich stets als Differenz derselben Ausdrücke mit x und x_1 darstellt, der Faktor $x - x_1$ absondern, wenigstens wenn man annimmt, daß derselbe unendlich klein sei, eine Annahme, die aber bei der willkürlichen Wahl von x immer erlaubt ist. Durch welche einfache Mittel übrigens man diese Absonderung ausführen kann, wenn die betrachteten Glieder Potenzen oder Wurzelgrößen oder trigonometrische Funktionen der unabhängig Veränderlichen enthalten, wird bei den einzelnen Aufgaben selbst gezeigt werden. Nachdem man ferner den Faktor $x - x_1$ oder eine Potenz desselben fortgehoben, setze man, um den dem Maximum oder Minimum entsprechenden Werth von x zu finden, $x = x_1$, eine Substitution die jetzt erst zu einem Resultate führt, weil sonst der in allen Gliedern enthaltene Faktor $x - x_1$ auf 0 reducirt wäre und wir folglich die identische Gleichung

$$0 = 0$$

erhalten hätten. Hat man indessen nach Fortheben von $x - x_1$, $x = x_1$ gesetzt, so erhält man eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten x, aus welcher x zu berechnen ist. Der gefundene Werth von x ist dann die Abscisse des gesuchten Maximum oder Minimum, da das entsprechende $M(x)$ in der That die charakteristischen Eigenschaften jener ausgezeichneten Werthe besitzt.

Schellbach, K.H. (1860): Mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin: Reimer; S.17