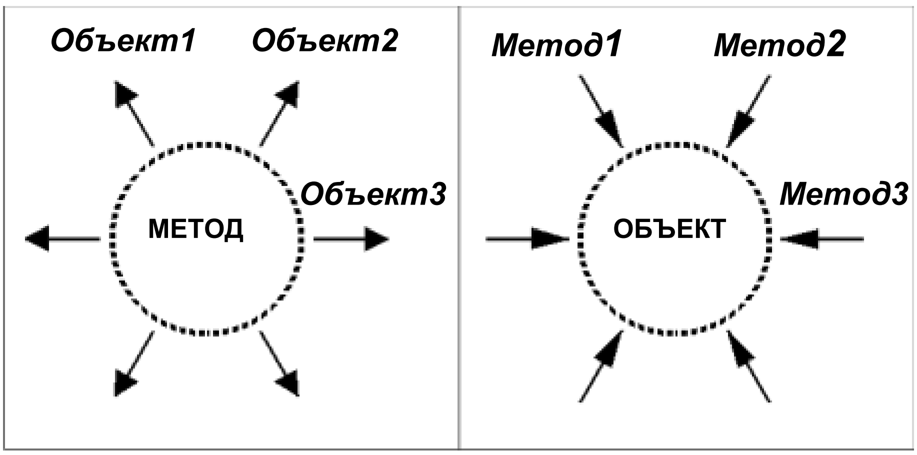
3 Возможности использования методов динамической геометрии в задаче об оптимизации прямоугольников

Чтобы полностью представить предмет, нужно посмотреть на него с другой стороны.
Свободный перевод R. Feynman (1918 - 1988)

3.1 Введение

Шупп (Schupp, 1996) справедливо подвергал критике традиционное преподавание математики, в котором вводятся методы, которые можно демонстрировать на подходящих математических объектах - вместо того, чтобы исследовать их с помощью нескольких подходящих методов (диаграмма 3.1). Причины главенства методической систематики надо искать в построении такого учебного плана, в котором математические инструменты развиваются последовательно от одного класса к другому для облегченного преподавания и приобретения знаний учащимися.

Было бы лучше, если на уроках математики можно было бы достигнуть равновесия между изучением разных объектов одним методом и применением разных методов для изучения одного объекта.



Один метод – много объектов изучения   Один объект – много методов изучения

Диаграмма 3.1

Средством уравновешивания является, в первую очередь, принцип спиральности как принцип предупреждающего обучения: “Приобретение области знания не обязательно откладывать до тех пор, когда эти знания можно преподнести в окончательно замкнутой (законченной) форме, а следует преподнести в уравновешенной форме уже на ранних ступенях обучения”, так и выраженный как принцип продолжения: “Выбор и изложение одной темы не должно быть одноразовым, а имеющим продолжение на более высоком уровне…” (Wittmann, 1981). Во-вторых, уравновешивание достигается принципом “разнообразия компьютерно-ориентированных методов ”, поскольку математические компьютерные инструменты открывают многообразие возможностей в предупреждающем обучении при изучении предметов математических уроков приемами «черного ящика». Опасность в использовании таких приемов заключается в остановке на компьютерно-ориентированных математических экспериментах. Необходимо постоянно разрабатывать обоснование математических экспериментов, а это часто достигается без использования компьютерных инструментов.

Выбор темы: “Оптимизация прямоугольника” (5-10 классы) определяется привязанностью этой темы к практике. Эта тема позволяет развивать оперативное и функциональное мышление, а также абстрагирование и нахождение аналогий. Кроме того, ученики и взрослые имеют трудности с изопериметрическими задачами.

Так как речь идет о геометрической теме, то естественно применить систему динамической геометрии. На отдельных примерах можно показать, насколько выразительными могут быть компьютерно-ориентированные методы, позволяющие непосредственно манипулировать геометрическими конструкциями.

В качестве системы динамической геометрии была выбрана Cabri Géomètre II (Laborde 1996), так как она располагает преимуществами по сравнению с другими системами (например, для создания линий геометрических мест, для аналитического представления и переопределения геометрических объектов).

Какие познавательные учебные цели преследуются в этой теме:

Учащиеся должны знать и понимать, что

- имеются равные по периметру (равные по площади) прямоугольники, которые имеют различную площадь (периметр);
- имеются равные по периметру (равные по площади) преобразования прямоугольников, которые изменяют величину площади (периметра);

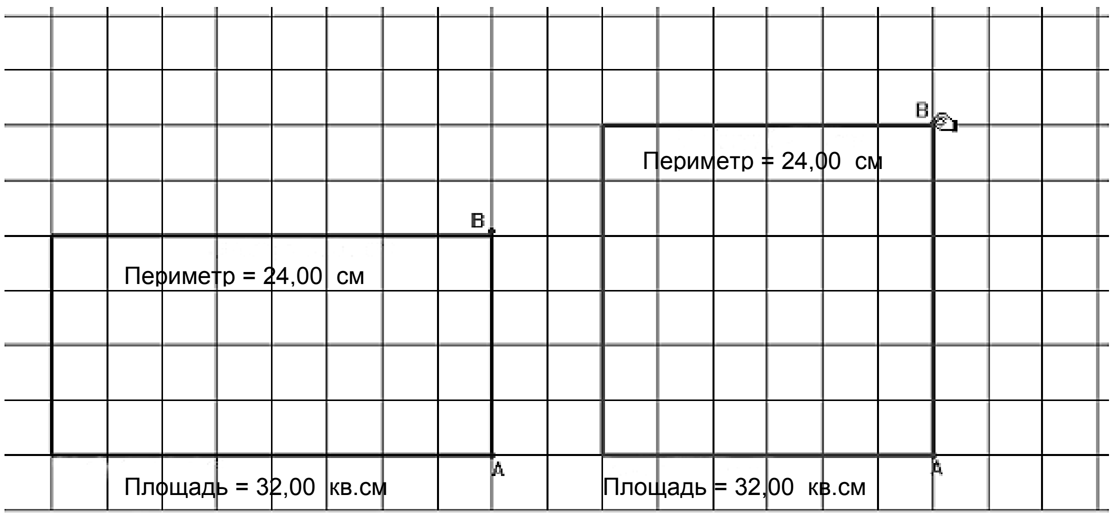
- величина площади (периметра) увеличивается (уменьшается) для равных по периметру (площади) прямоугольников при уменьшении разности сторон;
- среди всех равных по периметру (площади) прямоугольников квадрат имеет наибольшую площадь (наименьший периметр);
- изменение величины площади (периметра) при равных по периметру (площади) преобразованиях прямоугольника может быть точно описано;
- функциональные отношения между сторонами прямоугольника у прямоугольников равных по периметру (площади) могут быть точно описаны;
- прямоугольник однозначно определяется периметром и площадью;
- ...

3.2 Использование многообразия методов

Для изучения математического объекта в распоряжение учеников предоставляются интерактивные рабочие листы (Schumann, 1998a), которые устанавливают порядок проведения математического эксперимента. Каждый из рабочих листов олицетворяет один метод. Возможность непосредственно манипулировать с заданной геометрической конструкцией и числовыми данными создает обширную основу для необходимого уровня абстрагирования в теории. После применения экспериментальных методов динамической геометрии в 7-8 классах можно перейти к методам алгебраического доказательства и обоснования. – Тем самым обеспечивается требования математического ядра учебной программы.

3.2.1 5-6 классы

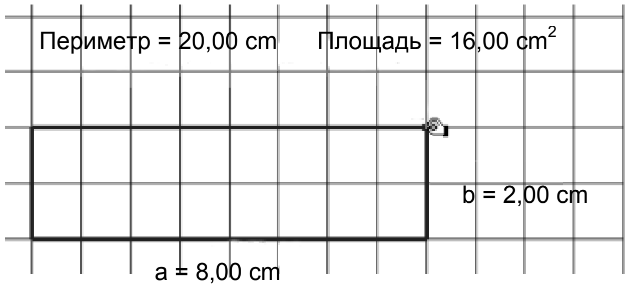
Для изучения представленные рабочие листы служат первым знакомством с темой. Перемещение точек A и B (рис. 3.1 - открытая постановка задачи) происходит в точке захвата. (В решетке оптимальным среди изопериметрических прямоугольников является такой, чей периметр делится на 4, а среди прямоугольников с одинаковой площадью такой, чье значение площади является квадратом целого числа. Эти свойства присущи квадрату.) Математический эксперимент на рис. 3.2. построен так, что периметр прямоугольника не меняется. Вывод: квадрат имеет наибольшую площадь (рис. 3.2b; число различных прямоугольников с равными периметрами получается из аддитивного разложения половины периметра на два слагаемых). – Из опыта следует, что ученики имеют больше трудностей в понимании того, что прямоугольники с равными периметрами могут иметь различную площадь, чем того, что прямоугольники с равной площадью могут иметь разный периметр. Так, например, только около 20 процентов из 125 учащихся 6 класса (реальной школы) смогли нанести на сетку два различных прямоугольника одинакового периметра различной площади, и примерно в два раза большее количество учащихся смогли нарисовать два различных прямоугольника одинаковой площади и различного периметра.



Задания: перемещая A и B, построй два прямоугольника с
a) различным периметром и различной площадью
b) одинаковым периметром и различной площадью
c) различным периметром и одинаковой площадью

Можешь ли ты также создать два разных прямоугольника одинакового периметра и одинаковой площади?
Начерти свои прямоугольники на бумаге в клетку!

Рис. 3.1



Прямоугольники равного периметра на сетке

Измени форму прямоугольника, перемещая Z. Наблюдай при этом за его периметром и площадью. Начерти прямоугольники также на бумаге в клетку.

Рис. 3.2a

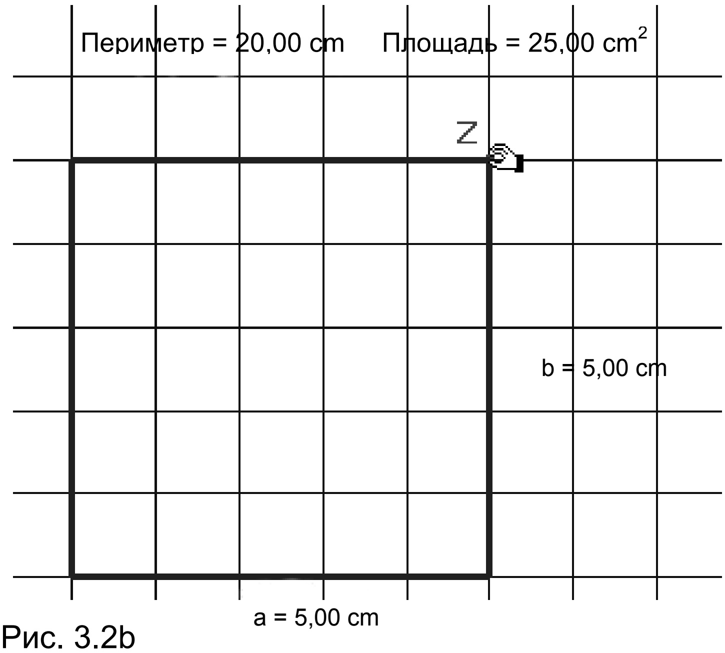


Рис. 3.2b

Рабочий лист на рисунке 3.3a служит для поиска вывода о том, что из единичных квадратов можно создать прямоугольники с одинаковой площадью различной формы, которые имеют периметры разной величины (рис 3.3b: решение вытекает, в общем, из разложения квадрата числа на два сомножителя).

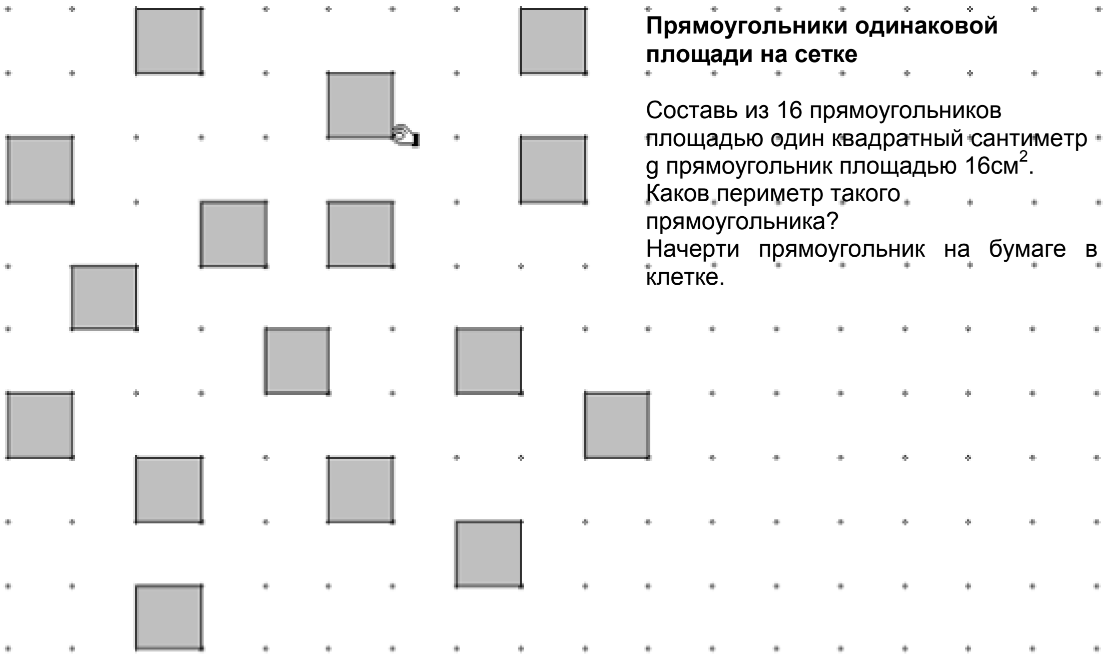


Рис. 3.3a

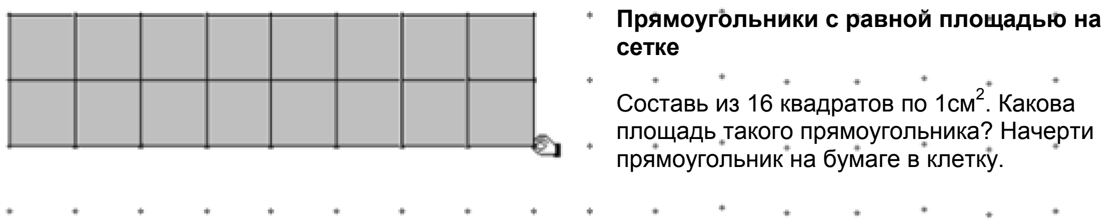


Рис. 3.3b

В 6 классе можно использовать простые десятичные числа как единицы измерения. Соответственно, сегментированный отрезок периметра складывается в прямоугольник ABCD (рис 3.4a/b). Изменением промежуточной точки D меняется соотношение сторон, при этом следует, что площадь становится все больше, если разность длин сторон уменьшают; площадь будет наибольшей, если прямоугольник - квадрат (рис. 3.3b/c).

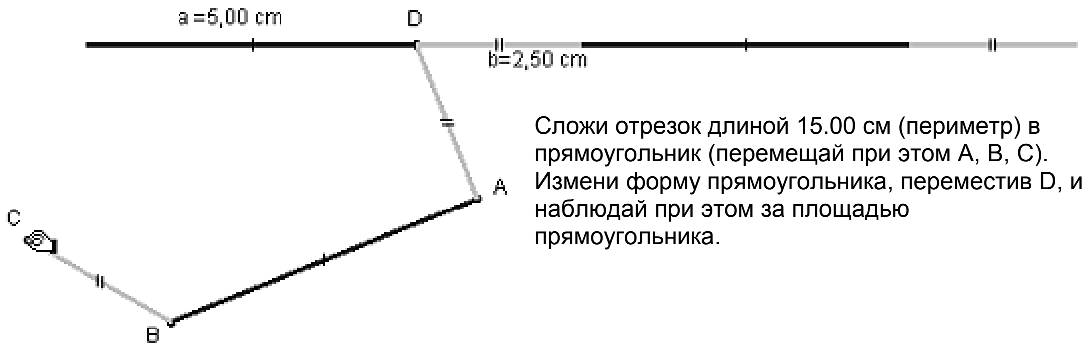


Рис. 3.4a

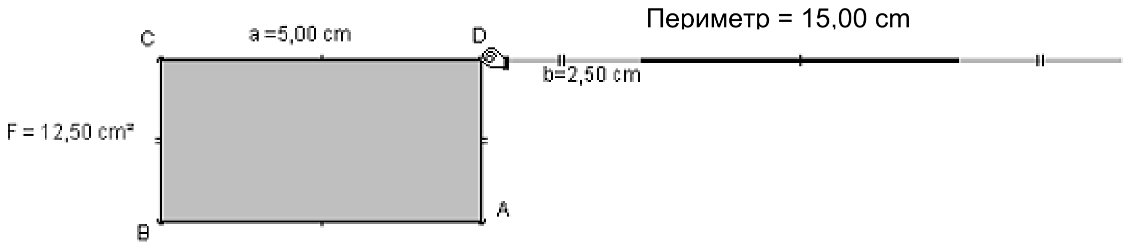


Рис. 3.4b

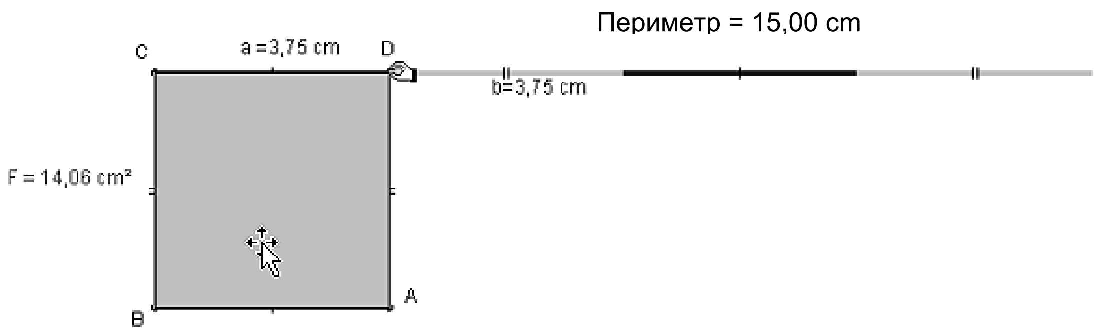


Рис. 3.4c

3.2.2 7- 8 классы

В то время как в 5-6 классах, в основном, отдается предпочтение только экспериментальному методу познания, в 7-8 классе для обоснования получения новых знаний можно применить средства школьной алгебры. При этом необходимо абстрагироваться от конкретных значений переменных величин. На первый план выдвигаются методы систематического конструирования прямоугольников с равной площадью или периметром. Как получают из одного прямоугольника равный по периметру прямоугольник, имеющий большую (меньшую) площадь, и как можно это преобразование выполнить с помощью геометрического построения?

Серия рисунков 3.5a - 3.5g показывает такой процесс преобразования с сохранением постоянного периметра (Schumann, 1985). - Соответствующее построение с помощью циркуля и линейки или транспортира (тогда необходимо производить измерения!) довольно просто.

Описание процесса преобразования:

От одного прямоугольника, который не является квадратом, отрезается прямоугольник, ширина которого должна быть меньше половины образуемого прямоугольника (рис 3.5a). Этот прямоугольник переносится на левый верхний угол прямоугольника (рис 3.5 b/c). Остающийся свободный кусок периметра переносится на правую сторону, с которой было обрезано, чтобы его замкнуть (рис. 3.5c/d). Новая фигура имеет периметр той же величины, как и исходный прямоугольник. Его площадь при неизменном периметре стала больше (рис. 3.55 - 3.5g). Путем последующих изменений отрезанного куска максимальное увеличение площади фигуры достигается, если отрезанный кусок имеет форму квадрата и возникающий равного по периметру прямоугольник - квадрат (рис. 3.5h).

Теперь предлагается перейти от наглядного изображения к описанию на формальном языке:

Пусть длина прямоугольника a, ширина прямоугольника b, а c - величина, уменьшающая сторону прямоугольника, тогда прямоугольник имеет площадь $[a - (b + c)]\, c = (a - b)\, c - c^2$, которая становится наибольшей при $c = (a - b) / 2$: максимальное значение $((a - b) / 2)^2$. Тогда прямоугольник с наибольшей площадью имеет длины сторон $a - (a - b) / 2$ и $b + (a - b) / 2$ и они равны среднему арифметическому a и b: $(a + b) / 2$. Преобразование в обратном порядке ведет к прямоугольнику равному по периметру, но наименьшей площади.

Преобразование прямоугольника постоянного периметра и увеличивающейся площадью

Перемести друг за другом части прямоугольника с помощью точек 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы преобразовать его в прямоугольник с тем же периметром, но большей площадью. Измени с помощью точки 6 величину отрезаемого куска. Когда площадь станет наибольшей? Проделай изменения также в обратном порядке.

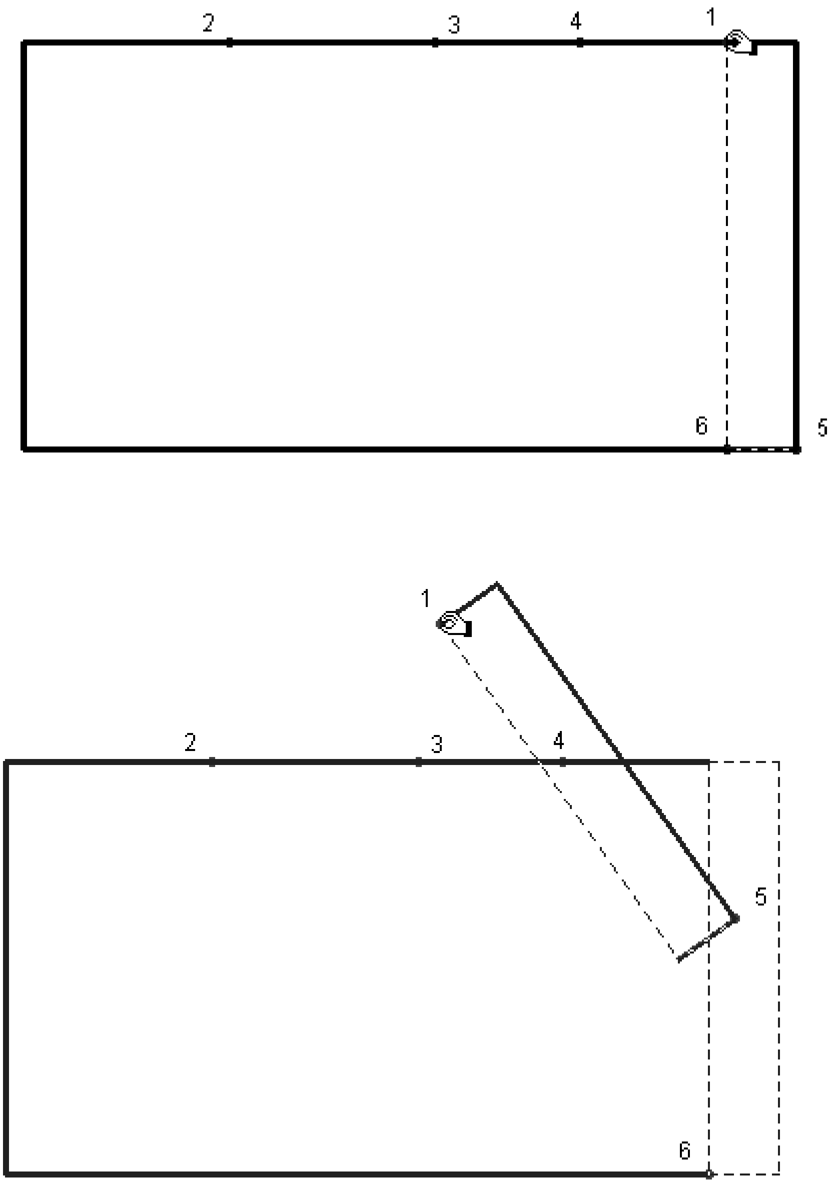


Рис. 3.5a/b

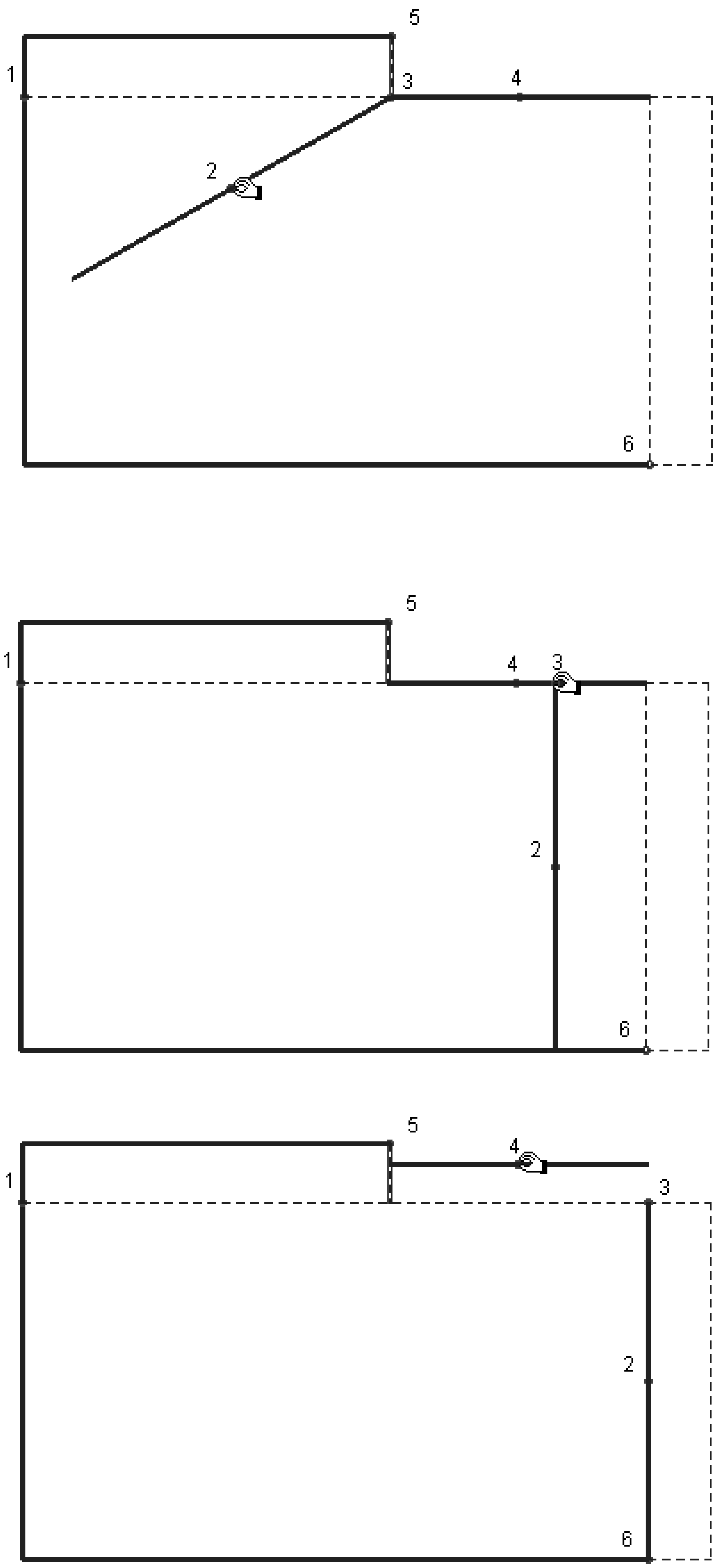


Рис. 3.5с - 3.5е

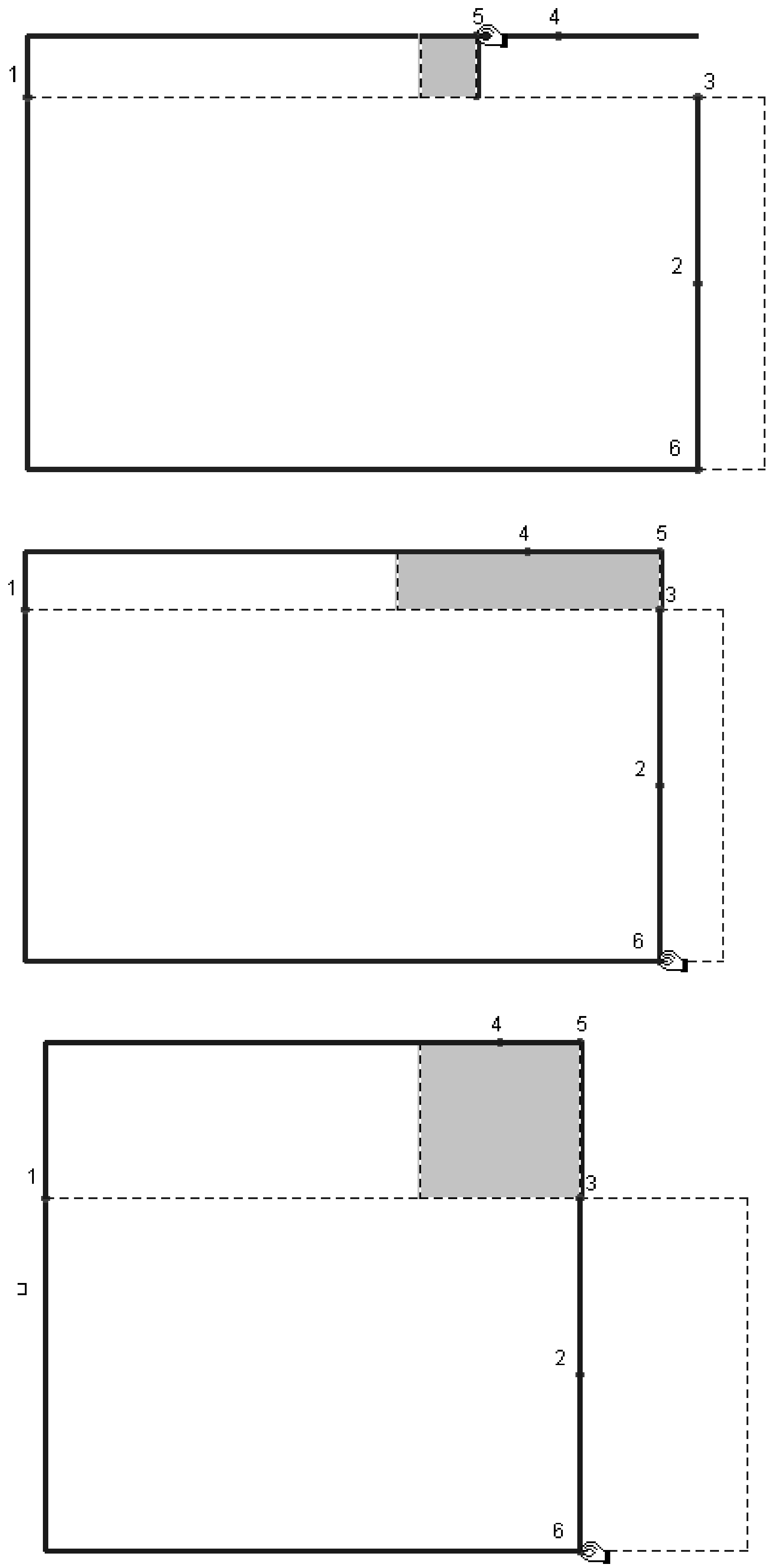


Рис. 3.5f - 3.5h

При преобразовании прямоугольника с постоянным периметром и увеличивающейся площадью, длины сторон должны уравниваться, для того чтобы периметр оставался постоянным (рис. 3.6). На сколько увеличиться площадь? - При |AB| = a, |BC| = b, a > b и a‘ = a – c, b‘ = b + c (по построению) имеем ab < a’b‘ = (a - c) (b + c) или 0 < (a - b) c - c^2 (выигрыш площади) и это как раз тот случай, когда c < a - b. – Если перейти от прямоугольника A’B’C’D‘ к прямоугольнику ABCD с равными периметрами, то имеем потерю площади, которая выражается через a‘ и b‘ (перерасчет выигрыша площади!).

Выравнивание сторон и увеличение площади у прямоугольников с равным периметром

Почему прямоугольник ABCD равен по периметру прямоугольнику A’B’C’D’? Докажи равенство сторон b’=b+c: (Примени: C’ есть зеркальная точка при отражении относительно биссектрисы угла CEC’). На сколько площадь A’B’C’D’ больше чем ABCD?

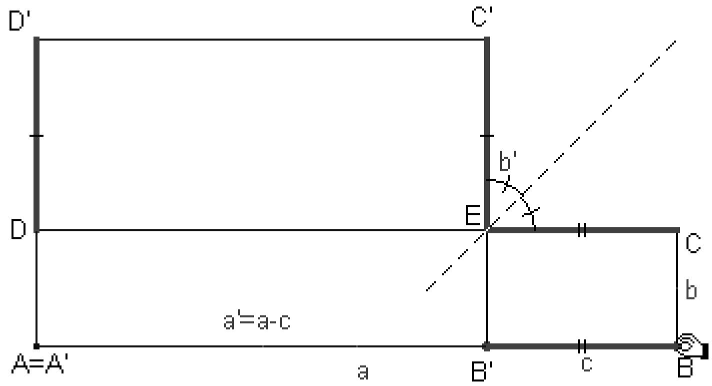


Рис. 3.6

Как получить из одного прямоугольника равный по площади прямоугольник с различным периметром?

Преобразование равных по площади прямоугольников посредством равенства дополнений

Для преобразования прямоугольника ABCD в прямоугольник A’B’C’D’ с равной площадью перемести C’. Обоснуй, что эти прямоугольники имеют равную площадь.

Наблюдай за изменением величины U’ периметра A’B’C’D’.

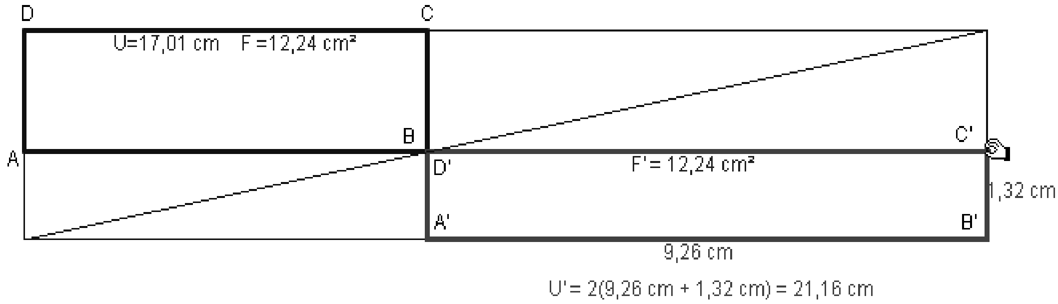


Рис. 3.7a

С помощью дополняющих прямоугольников можно легко произвести такое преобразование (рис. 3.7a). Соответствующее построение с помощью циркуля и линейки или построение с транспортиром не составляет трудности. Изменяемый прямоугольник имеет минимальный периметр, когда он становится квадратом (рис. 3.7b).

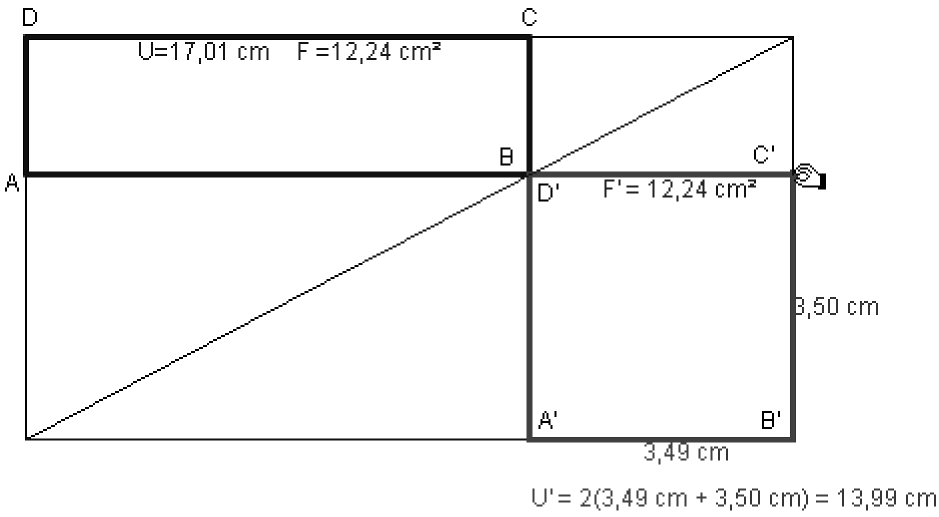


Рис. 3.7b

При преобразовании прямоугольника равной площади и уменьшающимся периметром должна сохраняться величина площади, тем самым площадь остается неизменной (рис. 3.8). Насколько меньше будет периметр? – При |AB| = a, |BC| = b, a > b и a‘ = a - c_1, b‘ = b + c_2 есть ab = a’b‘ (по построению). Прямоугольники имеют общую площадь AB’ED; из ab = (a - c_1) (b + c_2)

получается: $c_2 = c_1 b / (a - c_1)$ и U > U‘ эквивалентно $(c_1^2 - (a - b) c_1) / (a - c_1) < 0$ (потеря периметра: $((a - b) c_1 – c_1^2) / (a – c_1)$ как раз при условии $c_1 < a – b$. При переходе от прямоугольника A’B’C’D‘ к прямоугольнику с равной площадью, получается потеря периметра, которую можно выразить через a‘ и b‘ (вычисление потери периметра!).

Тождеством $(a + b)^2 = 4ab + (a – b)^2$ можно обосновать оптимальные свойства квадрата как прямоугольника: если периметр прямоугольника с длинами сторона a, b постоянен, то $(a + b)^2$ также постоянен: слагаемое 4ab и тем самым площадь становится наибольшей, если $(a - b)^2 = 0$, как и если a = b (рис. 3.9). Кроме того, из данных измерений длин и площадей видно, что площадь становится больше (меньше), если разность сторон становиться меньше (больше). Если величина площади постоянна, то постоянно слагаемое 4ab. Сумма $(U/2)^2 = 4ab + (a - b)^2$ становится наименьшей, а, следовательно, и периметр становится минимальным, если $(a - b)^2 = 0$, то есть когда a = b (рис. 3.10). Периметр становится меньше (больше), если разность сторон становится меньше (больше).

Выравнивание площадей и увеличение периметра у прямоугольников равной площади

Почему прямоугольник ABCD равен по площади A’B’C’D’? (Докажи, что прямоугольник B’BCE равен по площади прямоугольнику DEC’D’: выравнивание площадей.
На сколько периметр A’B’C’D’ меньше периметра ABCD? Предположи: a=AB>A’B’=a’ и a>b)

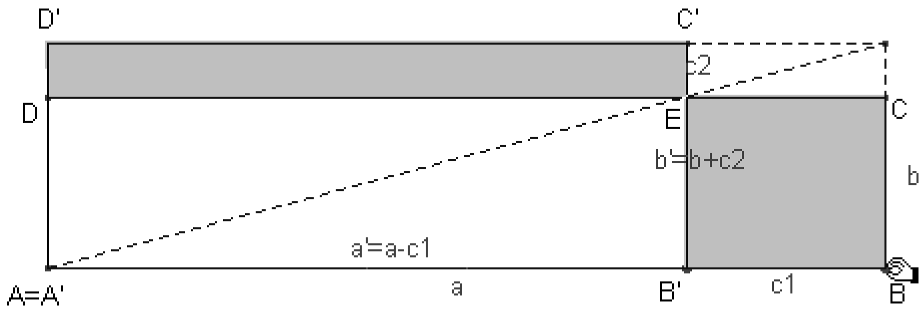


Рис. 3.8

$(a + b)^2 = 4ab + (a – b)^2$ и изопериметрические прямоугольники

Фигура рядом является симметричной при повороте (центр вращения: M).
Докажи, что: $(a + b)^2 = 4ab + (a – b)^2$
Воспользуйся формулами площади прямоугольника и квадрата.

Все прямоугольники с длиной a шириной b имеют одинаковый периметр (Доказательство?) Докажи с помощью данного уравнения:
Среди данных прямоугольников квадрат имеет наибольшую площадь.

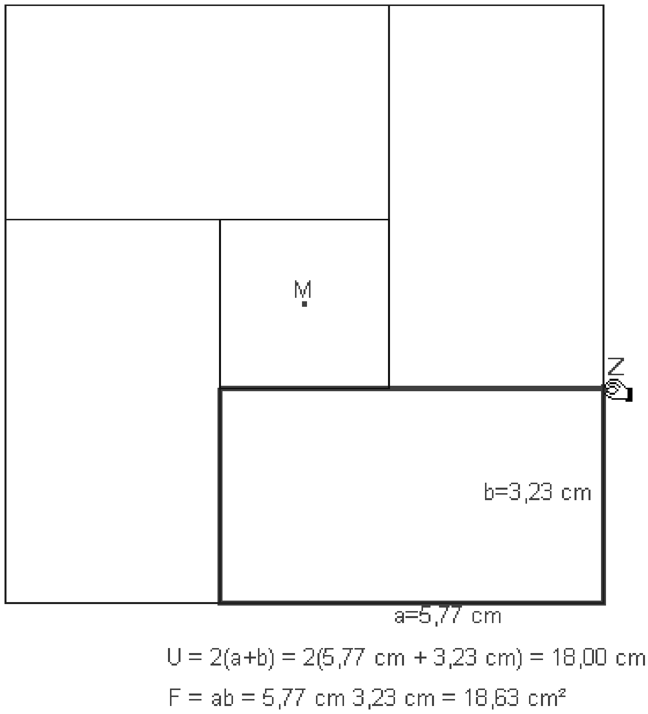


Рис. 3.9

$(a + b)^2 = 4ab + (a – b)^2$ и прямоугольники равной площади

Фигура рядом имеет ось симметрии вращения четвертого порядка с осью в точке M.
Докажи, что выполняется:
Воспользуйся формулами площади прямоугольника и квадрата.

Фигура сконструирована так, что при перемещении Z все прямоугольники с длиной a и шириной b сохраняют равную площадь.
Докажи уравнением сверху, что среди этих прямоугольников квадрат имеет наименьший периметр.

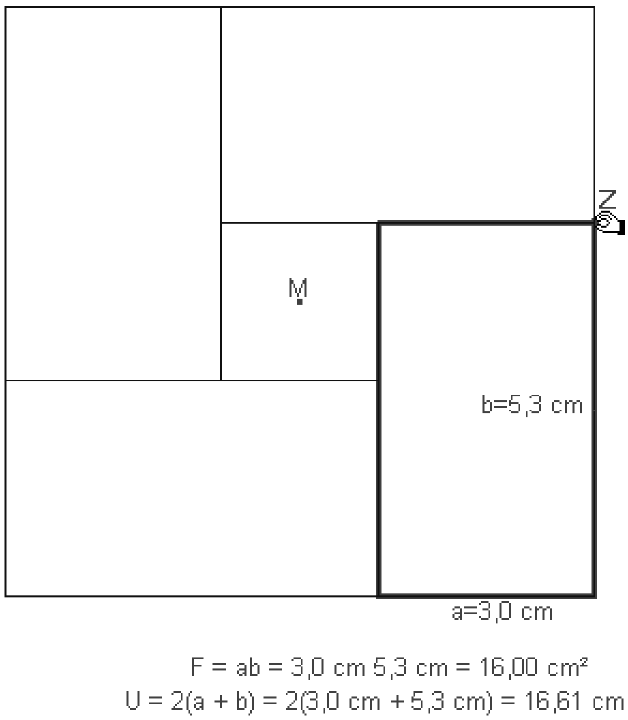


Рис. 3.10

Обратимся к функциональному способу изучения преобразования фигур, исследуя функциональную зависимость длин сторон друг от друга у прямоугольников равного периметра (равной площади). Свободно передвигаемая вершина является трассирующей точкой, которая оставляет след на экране (рис. 3.11a) в виде прямой. Эта прямая – геометрическое место изопериметрических точек, которая выражается функциональной зависимостью $b = U_0 / 2 – a$ (рис. 3.11b) и т.д. У прямоугольника с равной площадью свободная вершина оставляет след в виде прямоугольной гиперболы в первом квадранте (рис.3.12) с функциональной зависимостью $b = F_0/a$ и т.д.

Прямоугольник с заданным периметром и площадью может быть определен на рабочем листке 3.13a. Экспериментально определенное местонахождение вершины совпадает с местом пересечения геометрических мест точек равного периметра и равной площади (рис. 3.13); второе решение зеркально симметрично первому. Тем самым в 9 классе можно получить точное арифметическое/алгебраическое решение как решение квадратного уравнения.

Рис. 3.11a

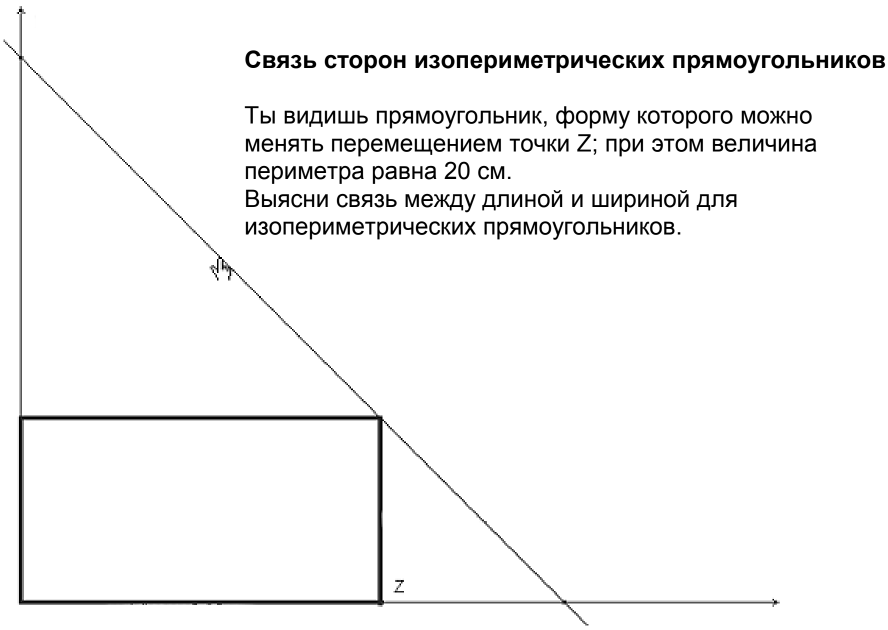


Рис. 3.11b

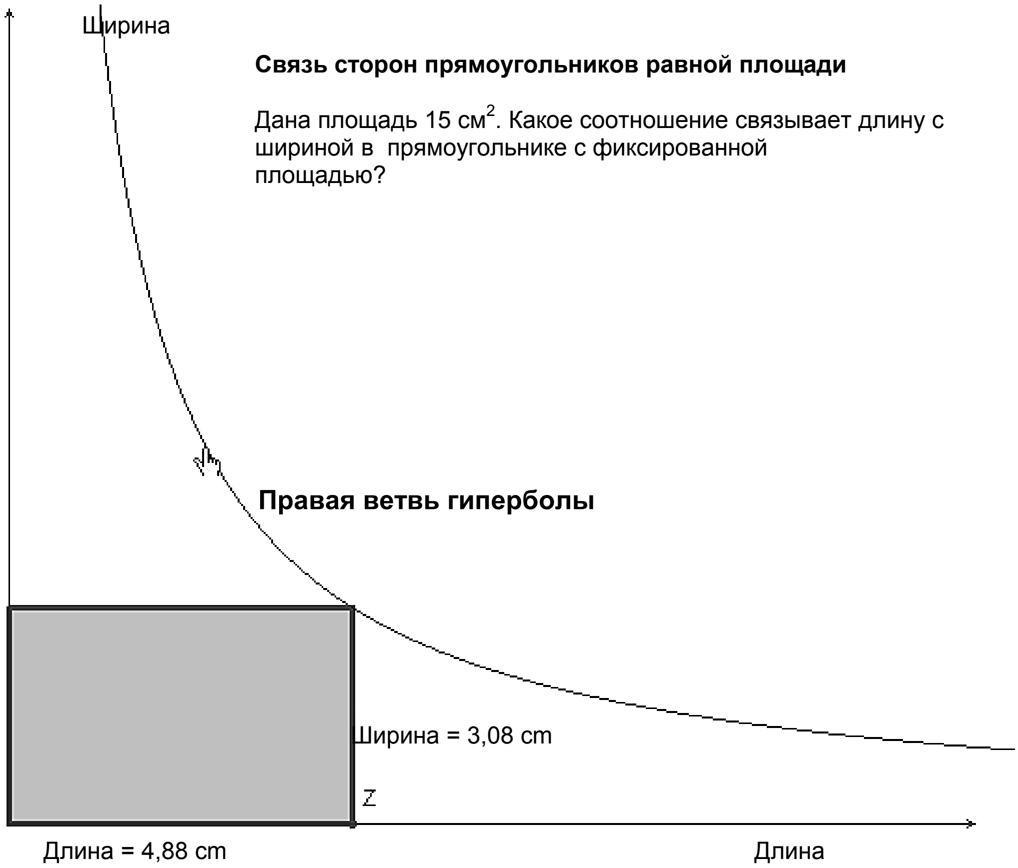
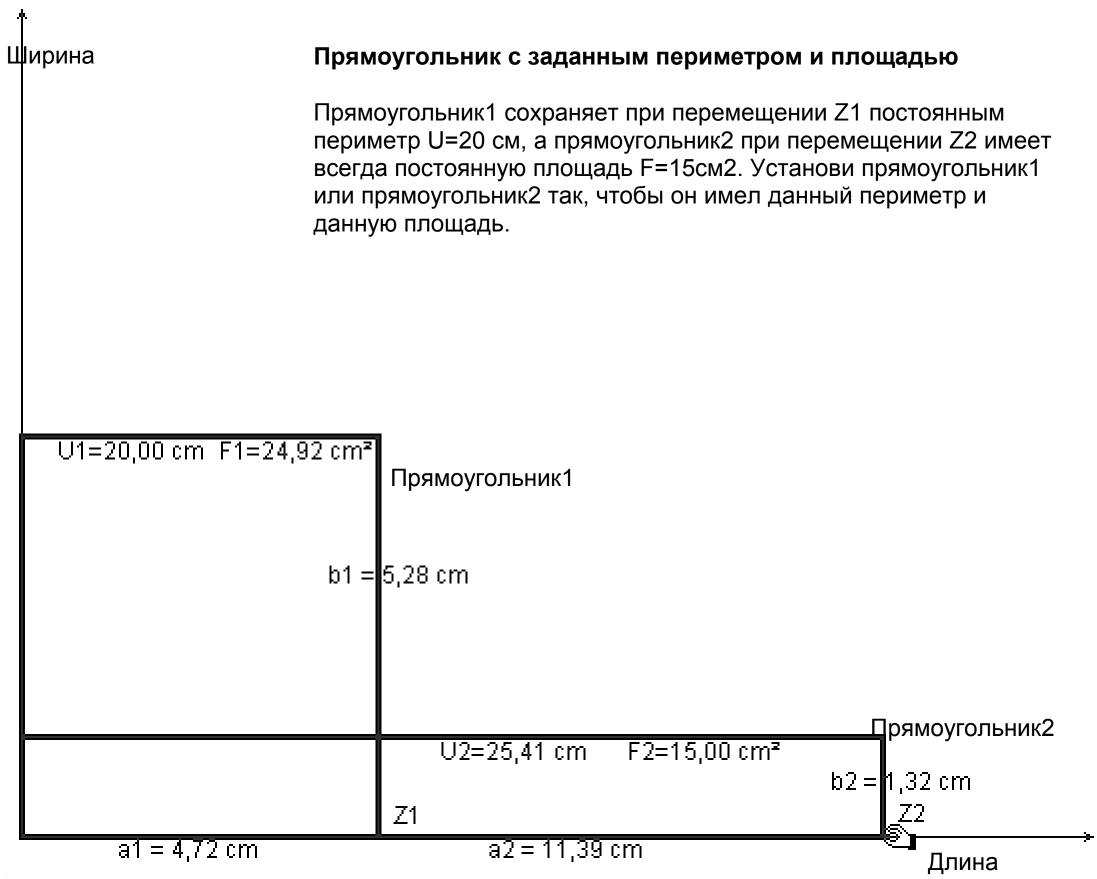


Рис. 3.12


Ширина
Прямоугольник с заданным периметром и площадью
Прямоугольник1 сохраняет при перемещении Z1 постоянным периметр U=20 см, а прямоугольник2 при перемещении Z2 имеет всегда постоянную площадь F=15см2. Установи прямоугольник1 или прямоугольник2 так, чтобы он имел данный периметр и данную площадь.
U1=20,00 cm F1=24,92 cm²
Прямоугольник1
b1 = 5,28 cm
Прямоугольник2
U2=25,41 cm F2=15,00 cm²
b2 = 1,32 cm
Z1
Z2
a1 = 4,72 cm
a2 = 11,39 cm
Длина


Ширина
Прямоугольник с заданным периметром и площадью
Прямоугольник1 сохраняет при перемещении Z1 постоянным периметр U=20 см, а прямоугольник2 при перемещении Z2 имеет всегда постоянную площадь F=15см2. Установи прямоугольник1 или прямоугольник2 так, чтобы он имел данный периметр и данную площадь.
U1=20,00 cm F1=24,92 cm²
Прямоугольник1
b1 = 5,28 cm
U2=19,99 cm
F2=15,00 cm²
b2 = 1,84 cm
Прямоугольник2
Z1
Z2
a1 = 4,72 cm
a2 = 8,16 cm
Длина

Рис. 3.13a/b

3.2.3 9-10 классы

Мы продолжаем начатый в 8 классе функциональный способ изучения, в котором мы исследуем функциональную зависимость площадей (периметров) от длины одной стороны прямоугольника с фиксированным периметром (площадью). При этом мы используем возможность изобразить функциональную зависимость между данными измерения в виде графика геометрических мест точек определенного свойства (фиксированный периметр или площадь). - Такие функциональные соотношения можно назвать “квази-эмпирическими” (Шуманн 1998b); в числовых окошках как в ячейках электронных таблиц спрятаны, конечно соответствующие формулы расчетов.

На рисунке 3.14а дается площадь изопериметрических прямоугольников в зависимости от длины одной стороны прямоугольника в первом квадранте системы координат, чтобы изобразить наглядно на графике функциональную зависимость, не зная выражения функции. Как же выглядит выражение функции? Из $U_0 = 2\,(a + b)$ и $F = ab$ следует $F = a(U_0 / 2 - a)$.

Изопериметрические прямоугольники

Ты видишь прямоугольник, форма которого может меняться при перемещении точки Z; при этом величина периметра всегда неизменно равна 20см.
Изучи, как изменится площадь периметра при перемещении Z.

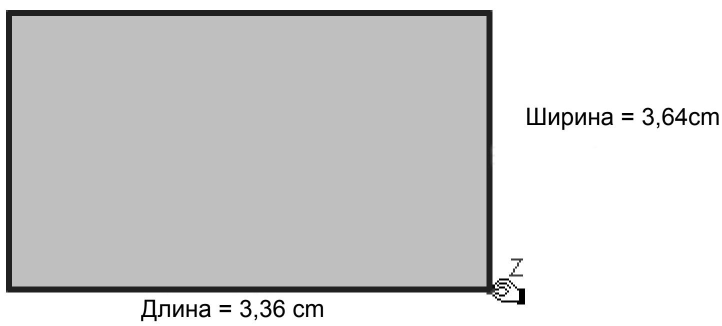


Рис. 3.14а

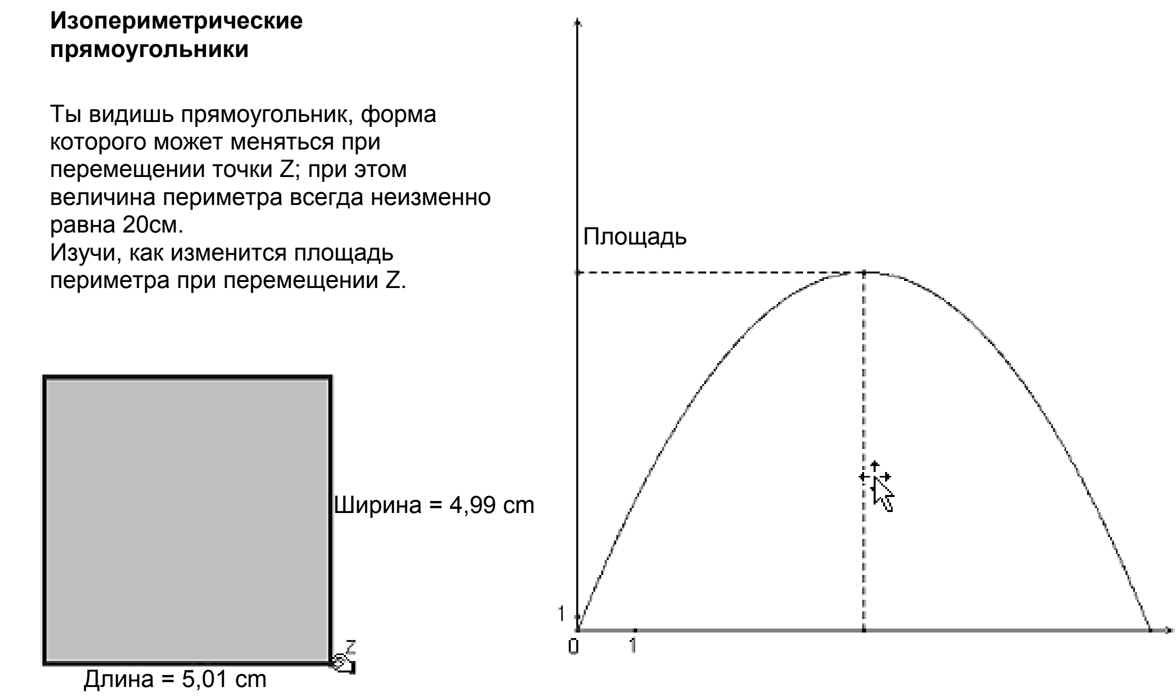


Рис. 3.14b

Перед нами квадратная функция, график которой парабола, ветви которой направлены вниз, с вершиной (a_s; F_s) как максимальной точки. Абсцисса a_s - среднее арифметическое корней a= 0 и a = $U_0/2$: $a_s = U_0/4$; $F_s = (U_0/4)^2$; прямоугольник с максимальной площадью является квадратом с длиной сторон $U_0/4$.

Соответственно периметр прямоугольника с фиксированной площадью (рис. 3.15 a/b) зависит от стороны прямоугольника следующим образом: $U = 2 (a + F_0 / a)$ (U - удвоенная сумма “биссектрисы и квадратной гиперболы ” в первом квадранте). По графику функции можно определить выражение функции: если a стремится к нулю или к бесконечности, то U стремится к бесконечности.

Определение величины экстремума с помощью квадратного дополнения:

$$U/2 = a - 2\sqrt{F_0} + F_0/a + 2\sqrt{F_0} = (\sqrt{a} - \sqrt{F_0/a})^2 + 2\sqrt{F_0}$$

U является минимальным, если положительное уменьшаемое равно нулю, т.е. когда $\sqrt{a} - \sqrt{F_0/a} = 0$. Получается $a = \sqrt{F_0}$ для $a > 0$ и $U_{min} = 4\sqrt{F_0}$; прямоугольник с минимальным периметром является квадратом с длиной сторон $\sqrt{F_0}$.

Мы изучим, как зависит площадь (периметр) у прямоугольника с равным периметром (площадью) от разности сторон (модуля разности сторон). На графике зависимости площади от разности сторон прямоугольников с равными периметрами мы узнаем, как уменьшается площадь, если увеличивается разность сторон и т.д. (рис. 3.16). Из $U_0 = 2\ (a + b)$ и $F = ab$ и используемом уже в 7-8 классе тождества $(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$ следует:

$F = (U_0/4)^2 - 1/4(a - b)^2$; график в первом квадранте есть “половина” вниз обращенной параболы. F максимальна именно тогда, если разность сторон равна нулю, т.е. когда a = b и т.д.

На графике зависимости площади от длины сторон у прямоугольников с равными периметрами узнаем, как увеличивается периметр, если разность сторон увеличивается и т.д. (рис. 3.17). Получается выражение функции $U = 2\sqrt{4F_0 + (a-b)^2}$; это корневая функция (половина прямоугольной гиперболы). Радикал наименьший, если разность сторон равно нулю, а именно, если $a = b = \sqrt{F_0}$ и $U_{min} = 4\sqrt{F_0}$.

Мы возвращаемся к синтетически геометрической методике, в которой мы устанавливаем отношение преобразования прямоугольников равной площади с учением о подобии.

Прямоугольник с постоянной площадью

Ты видишь прямоугольник, форму которого можешь изменить, перемещая точку Z; при этом величина площади всегда равна 25,00 кв.см.
Изучи, как величина периметра зависит от перемещения Z.

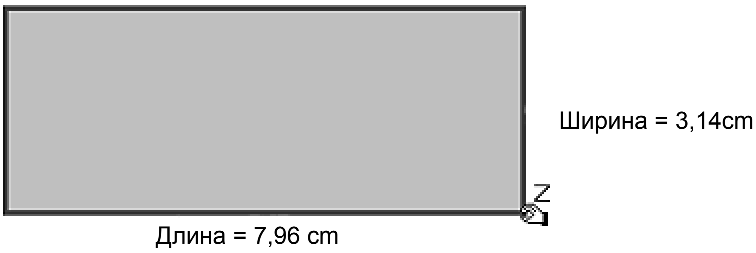


Рис. 3.15a

Прямоугольник с постоянной площадью

Ты видишь прямоугольник, форму которого можешь изменить, перемещая точку Z; при этом величина площади всегда равна 25,00 кв.см.
Изучи, как величина периметра зависит от перемещения Z.

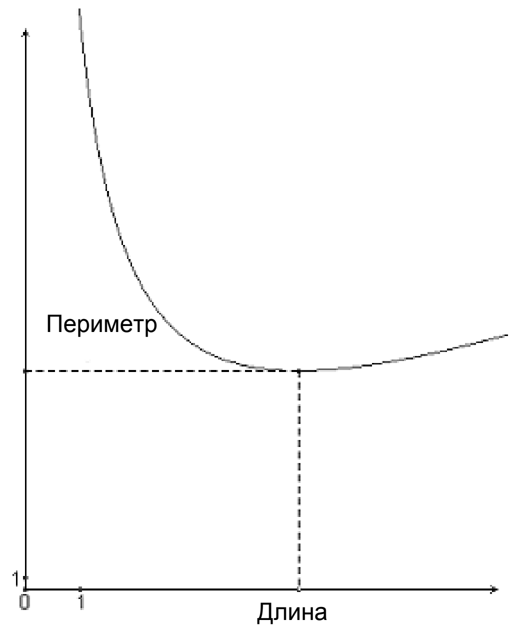
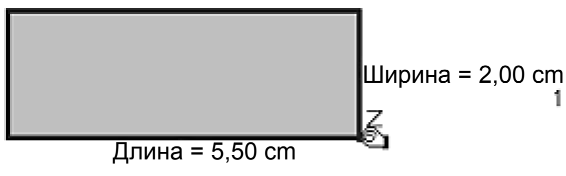


Рис. 3.15b

Разность сторон изопериметрических прямоугольников

Дана величина периметра 15 см. Какой из прямоугольников с таким же периметром имеет оптимальную площадь?



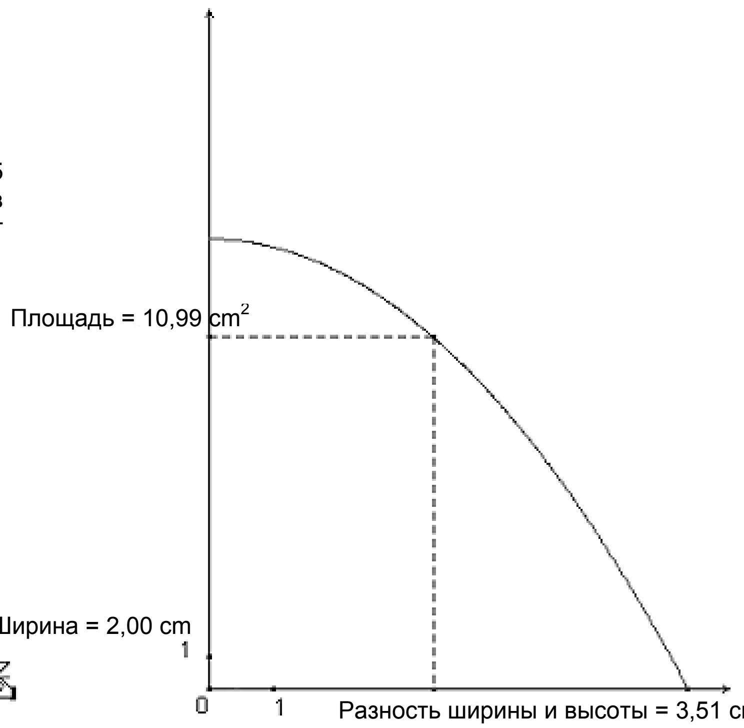


Рис. 3.16

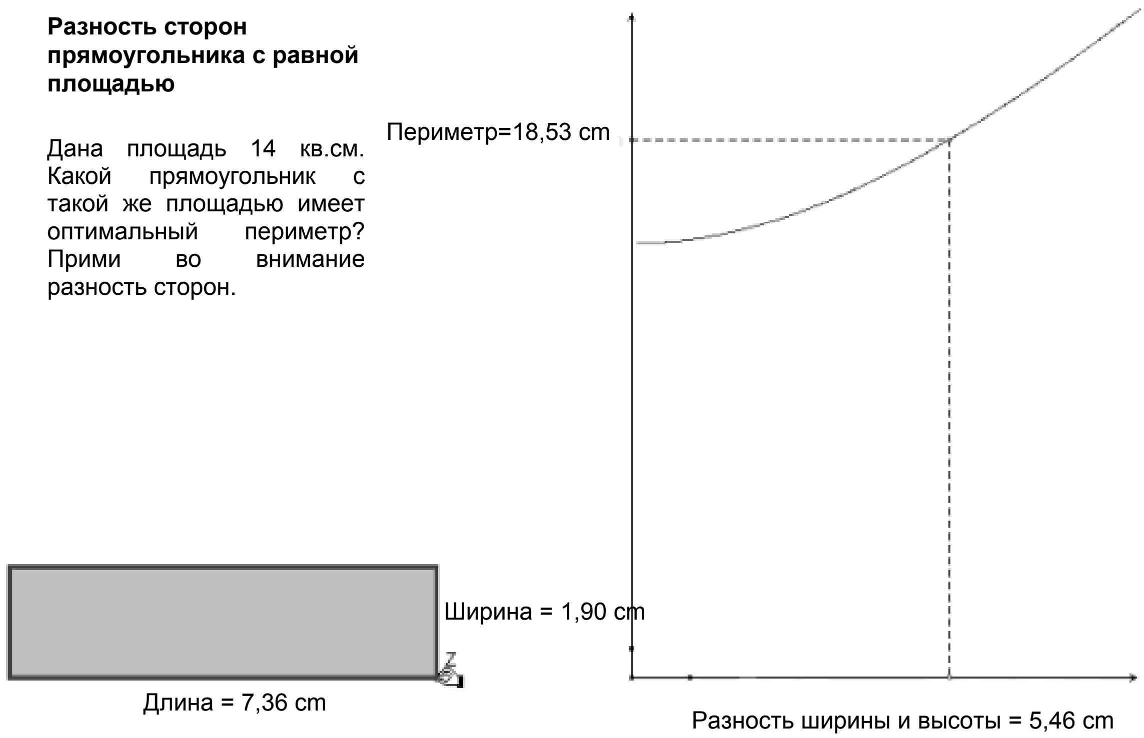


Рис. 3.17

Например, можно применить метод лучей, чтобы преобразовать один прямоугольник в другой с той же площадью (рис. 3.18; a/a‘ = b‘/b).

Преобразование прямоугольника с постоянной площадью с помощью метода лучей

Прямоугольник ABCD равен по площади A’B’C’D’. (Доказательство?)
Измени форму A’B’C’D’ перемещением точки B’ и наблюдай при этом величину периметра U’ прямоугольника A’B’C’D’.

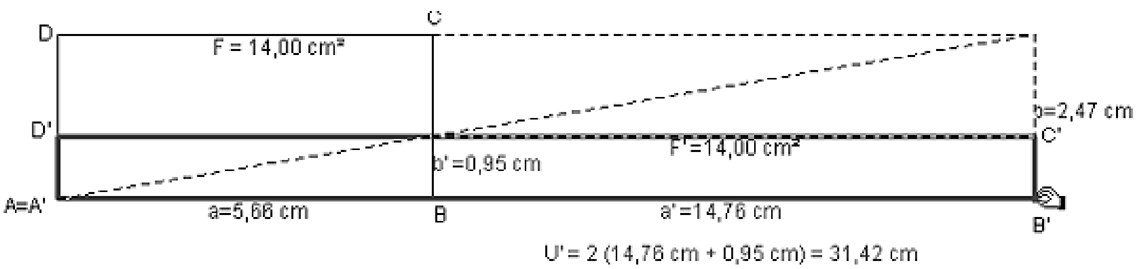


Рис. 3.18

Рисунок 3.19a показывает преобразование равных по площади прямоугольников из отрезков гипотенузы восстановлением высоты. (Danckwerts (1999) использует в качестве свободно перемещаемой точки деления гипотенузы на диаметре круга). Периметр становится минимальным, когда точка Z совпадает с серединой диаметра круга, т.е. когда заштрихованные прямоугольники становятся равными квадратами (рис. 3.19b). Доказательство экспериментально найденного вывода: $U/2 = c = q + p \geq 2h$, так как высота h равна по величине половине диаметра. U минимален, если $c = 2h$, т.е. когда треугольник ABC равнобедренный и, следовательно, $q = p$.

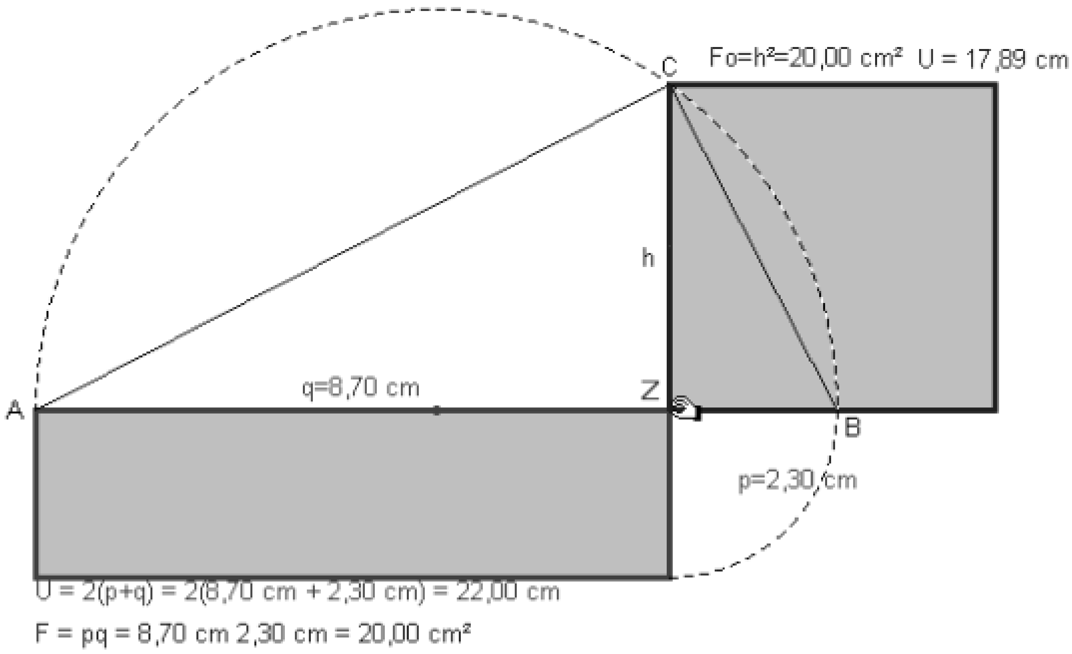
Так же с помощью катета может быть произведено преобразование одного прямоугольника в другой прямоугольник с равной площадью (рис. 3.20a). Периметр будет минимальным, если точка высоты Z совпадает с A и C (рис. 3.20b). Для доказательства: дано $U/2 = q + c \geq 2a$. При $a^2 = c\,q$ получаем $(c - q)^2 \geq 0$. Знак равенства можно поставить в том случае, если $c = q$, т.е. когда прямоугольник из гипотенузы и отрезка гипотенузы переходит в квадрат, который совпадает с квадратом на катетах (соответственно можно так же построить фигуру с катетом в основании так, что с ней можно проводить преобразования прямоугольника с постоянным периметром).

Мы заканчиваем перебор методов преобразований с равной площадью методом сдвига (рис. 3.21a). График эмпирической функции $ß \to U''$ можно видеть на рисунке 3.21b. - Имеется $F_0 = a\,b = a''\,b'' = (a/\sin ß)\,(b \sin ß)$ и

$U'' = 2(a'' + b'') = 2(F_0 / (b \sin ß) + b \sin ß)$ для $0° < ß \leq 90°$. (Тем самым мы можем представить при обсуждении нашей темы, за исключением экспоненциальной и логарифмической функции, все известные для основной школы типы функций).

Преобразование прямоугольника с равной площадью восстановлением высоты

В прямоугольном треугольнике ABC квадрат со стороной равной высоте h равен по площади прямоугольнику из отрезков гипотенузы p, q (восстановленная высота).
Перемести Z (точка основания высоты h), чтобы изменить форму прямоугольника. Изменяется ли при этом площадь?
Наблюдай за величиной его периметра.



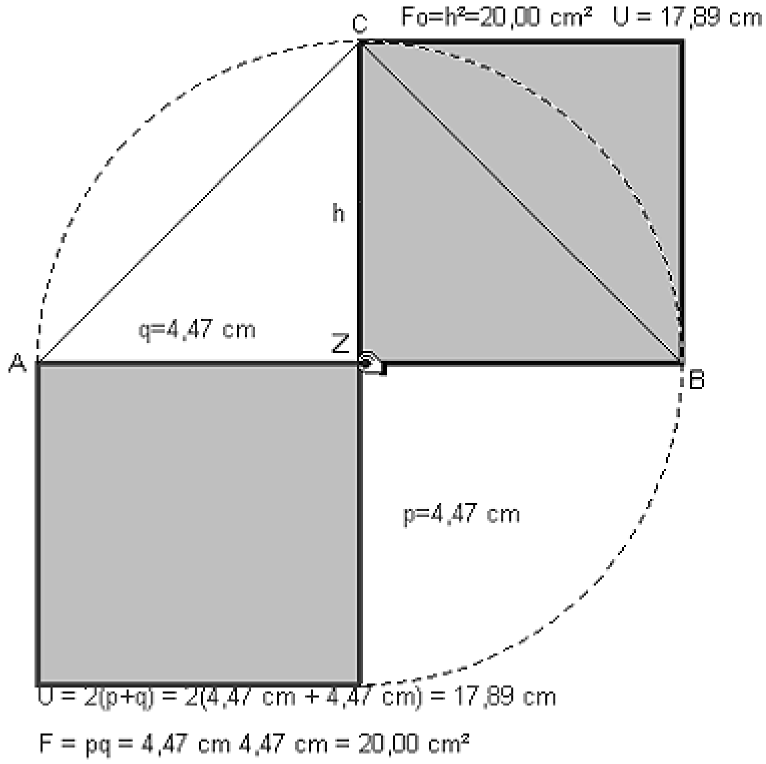
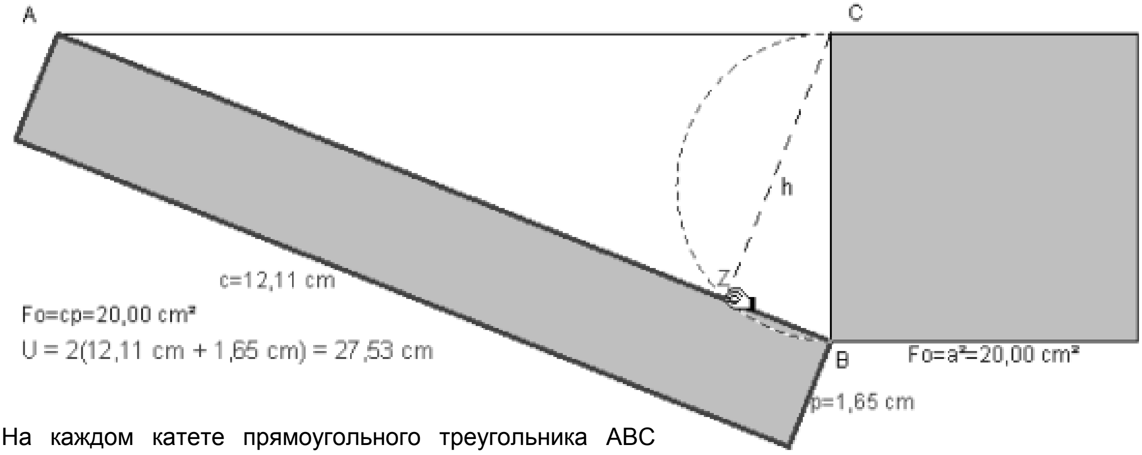


Рис. 3.19a/b

Преобразование прямоугольника равной площади с катетом в основании



На каждом катете прямоугольного треугольника ABC построен квадрат равный по площади прямоугольнику на гипотенузе и шириной отрезка катета.

Измени форму прямоугольника перемещением Z.
Изменяется ли при этом площадь?
Наблюдай за величиной периметра.

Рис. 3.20a

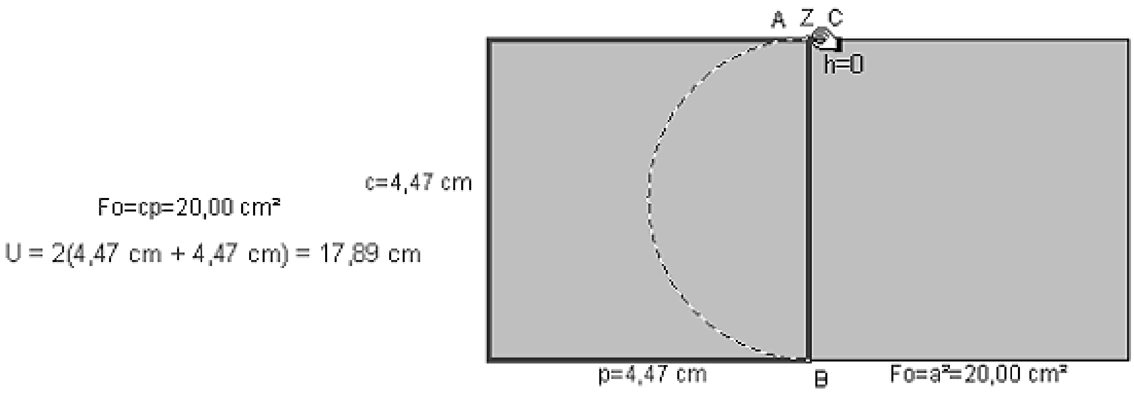
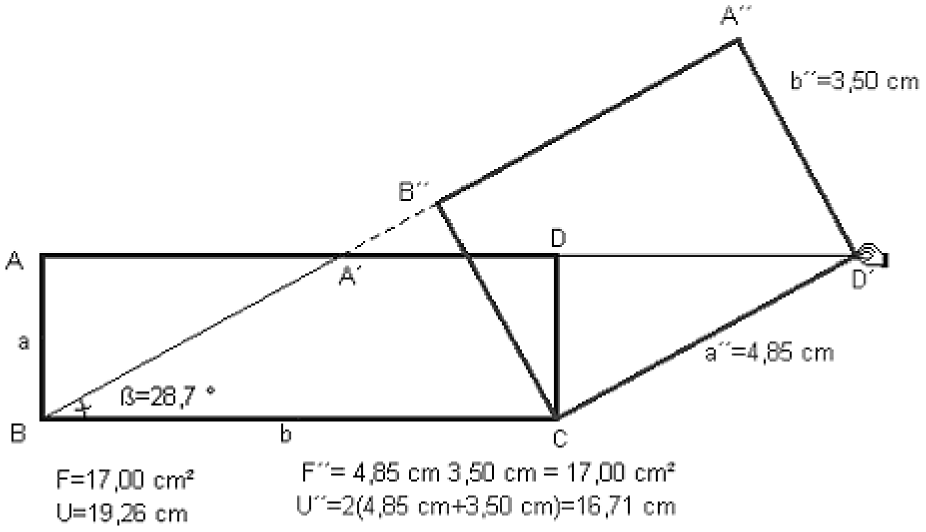


Рис. 3.20b

Определение экстремумов для периметра U'' достигается с помощью квадратного дополнения: условие для минимума b sin ß = $\sqrt{F_0}$ = $\sqrt{ab}$, итак действительно для экстремального срезаемого угла ß = arcsin ($\sqrt{a/b}$). Для $\sin^2$ ß = a/b получается $a'' = b''$.

Преобразование прямоугольника равной площади методом сдвига

Прямоугольник ABC равен по площади параллелограмму A'B'C'D' и он равен A''B''CD' (Доказательство?) Перемести точку D' и наблюдай при этом за величиной периметра U'' прямоугольника A''B''CD'.



Преобразование прямоугольника равной площади методом сдвига

Прямоугольник ABC равен по площади параллелограмму A'B'C'D' и он равен A''B''CD' (Доказательство?) Перемести точку D' и наблюдай при этом за величиной периметра U'' прямоугольника A''B''CD'.

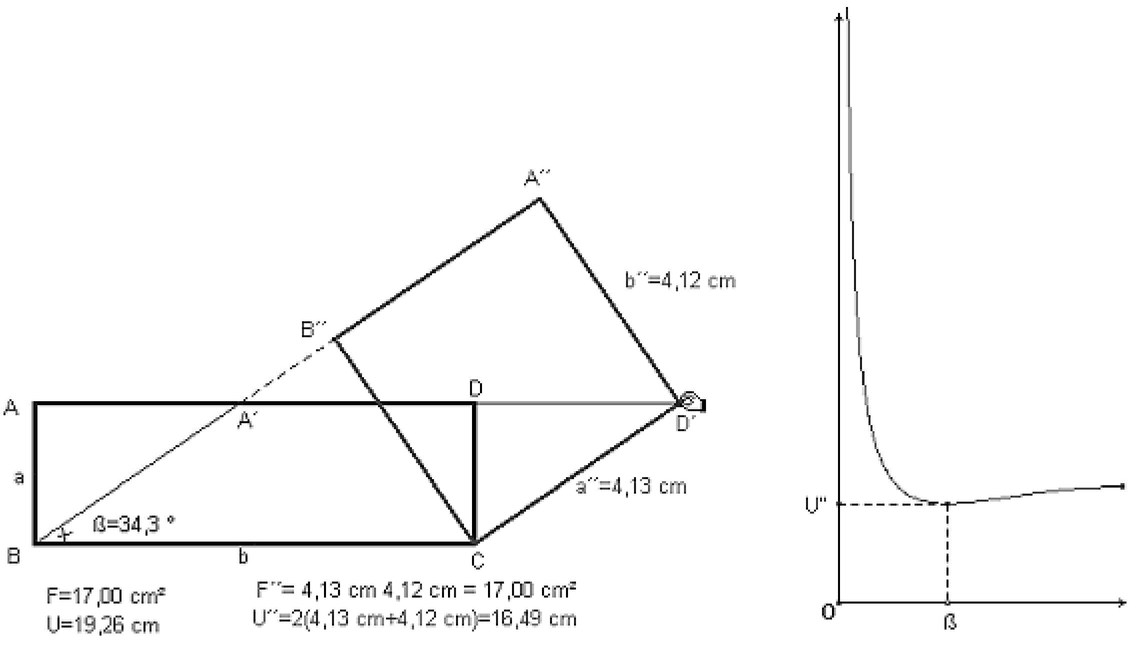


Рис. 3.21a/b

3.3 Заключительные замечания

Предлагаемые методы дают только один набор методов по теме "Прямоугольники равного периметра и площади". Так не включены неравенства для арифметического и геометрического среднего и прием последовательного преобразования прямоугольника в квадрат (например, по методу Герона). Применение названных неравенств среднего для наших уроков по данной теме мы считаем менее приемлемы для основной школы. Конечно же, отсутствует обобщенная трактовка темы для общих фигур как прямоугольника и пространственной аналогии, например, прямоугольный параллелепипед (сумма длин ребер, площадь поверхности и объем), для чего можно было бы привлечь 3D-инструменты.

Наряду с компьютерно-ориентированными методами динамической геометрии, используются традиционные методы на бумаге с карандашом (например, геометрические построения с помощью линейки и циркуля), а также методы работы с материалами (методы построения моделей или методы на основе моделей, например, завязанный шнур как постоянный периметр). Мы только частично остановились здесь на возможных взаимодействиях этих различных методов, чтобы не выходить за рамки данной работы.

Диаграмма 3.2

Подобным образом как тема экстремума для приема использования различных методов можно подготовить и другие темы уроков для компьютеризированной среды обучения. В этом смысле эта работа является вкладом в дискуссию о разработке учебного плана образования математики, учитывающей применение компьютера в средней школе.

3.4 Список литературы

Danckwerts, R. (1999): Dynamische Visualisierung und Mathematikunterricht: Ein Beispiel. – Vortrag auf der 33. Tagung für Didaktik Mathematik (1. bis 5. März 1999 in Bern)

Laborde, J.M.; Bellemain, F. (1996): Cabri Géomètre II. Windows Version 1.0 – Dallas/USA u. Freising: Texas Instruments. (Deutsche Oberfläche und Bearbeitung des Handbuchs von H. Schumann)

Schumann, H. (1985): Umfangsgleiche Rechtecke. – In: mathematik lehren (11), August, S. 42-45

Schumann, H. (1994): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. – Velten: Becker

Schumann, H. (1998a): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. – In: Mathematik in der Schule (36), Heft 10, S. 562-569

Schumann, H. (1998b): Geometrische Extremwertaufgaben in dynamischer Behandlung. In: ZDM 30, Heft 6, S. 215-223

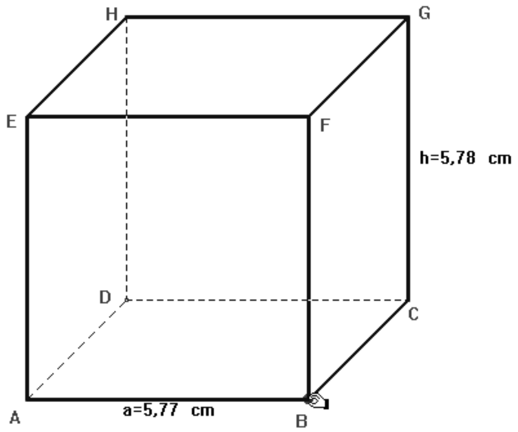
Schupp, H. (1996): Regeometrisierung der Schulgeometrie – durch Computer? In: Hischer, H. (Hrsg.): Computer und Geometrie. Neue Chancen für den Geometrieunterricht. – Hildesheim: Franzbecker, S. 16-25.

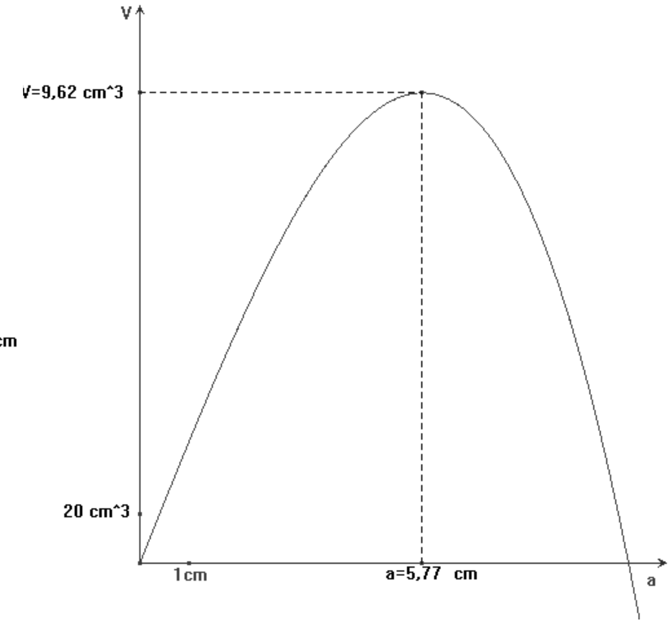
Schupp, H. (1992): Optimieren – Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht.- Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag

Wittmann, E. (1981): Grundlagen des Mathematikunterrichts.- Braunschweig: Vieweg (6. Auflage)

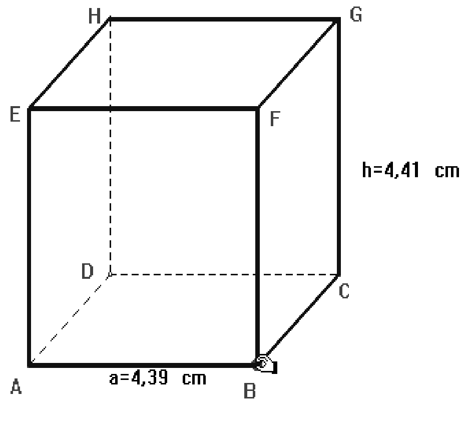
Оптимальный квадратный параллелепипед

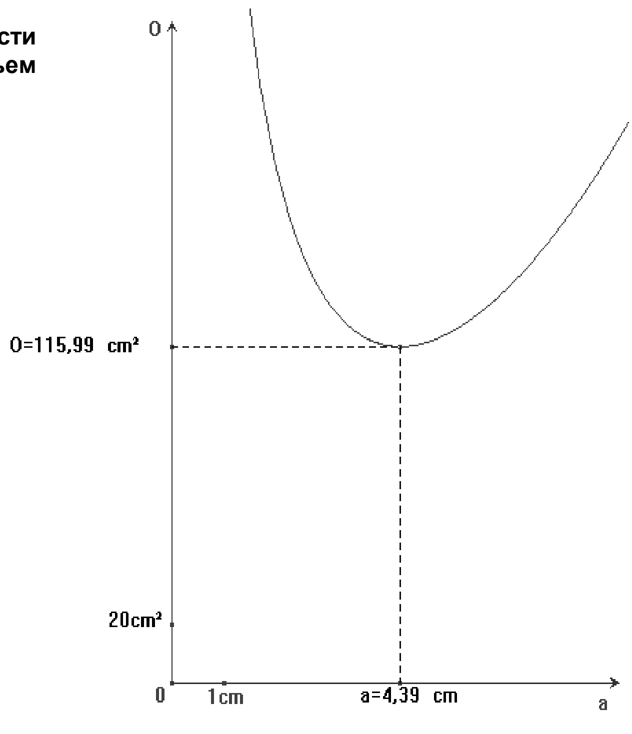
Как меняется объем квадратного параллелепипеда, площадь поверхности которого 200,00 кв.см.





Как меняется площадь поверхности квадратного параллелепипеда, объем которого 85 куб.см.





Среди квадратных параллелепипедов с равной площадью поверхности куб имеет наибольший объем.

Среди квадратных параллелепипедов с одинаковым объемом куб имеет наименьшую площадь поверхности.