2 «Открытие» и решение геометрических задач экстремума с помощью компьютера

Посмотрев на предмет с другой стороны, откроешь новое.

2.1 Введение

Еще в 70-е годы решение задач экстремума, которые сводились к квадратичным функциям, входила в постоянный набор задач в 9-ом классе. Наглядно эта методика разработана (представлена, исследована), например, в учебнике (Schönbeck/Schupp 1978). Как и другое математическое содержание, подобные математические задачи отошли на задний план, хотя они представляют обоснованное применение квадратичных функций, которые должны быть учтены для письменного выпускного экзамена. (Похвальное исключение составляет, в этой связи, преподавание математики в Баварии).

В современной дидактической дискуссии поднимается даже требование о введении “неквадратных” экстремумов в основную школу (von Dörr 1989, Glatfeld 1989, Schulz 1989, Schupp 1997). За исключением электронных таблиц, другие программные средства для решения задач экстремума в основной школе предлагаются только некоторыми авторами: Schumann (1991/92), Appel (1993), Rüthing (1998).

Продолжим обсуждение методики преподавания с использованием систем динамической геометрии и компьютерной алгебры, развивая для решения задач геометрических экстремумов концепцию, которая ведет к более общей, чем квадратичной, целевой функции.

2.2 Использование компьютеров для решения задач экстремума

Мы начнем с критики традиционной методики преподавания задач экстремума: постановка задачи всегда исходит в предположении существования экстремума, хотя как раз открытие того, что максимум или минимум вообще имеется, является актом познания для самого себя. Поэтому, во-первых, в специально подобранных задачах необходимо провести исследование геометрических фигур на экстремальные свойства. Во-вторых, установленное экстремальное свойство необходимо сформулировать в виде вычислительного задания. В-третьих, необходимо решить (точно) это вычислительное задание.

Адекватное моделирование геометрических фигур при исследовании их на экстремальные свойства предлагает использование программ динамической геометрии. (Мы используем программное обеспечение Cabri Géomètre). Сформулируем следующий экспериментальный метод для «открытия» экстремумов и формулировки соответствующих вычислительных задач, который также позволяет определить значение экстремума “на глаз” (Schumann 1998):

(1) Конструкция геометрической фигуры, которая удовлетворяет граничным условиям;

(2) Изменение независимого параметра фигуры или изменение части фигуры с одновременным наблюдением функциональной зависимости (независимая величина – зависимые величины) в таблице и графике.

(3) Распознание экстремального свойства (приближенное определение точки экстремума и его значения).

(4) Варьирование параметра фигур и проверка инвариантности экстремума.

(5) Формулировка общей задач геометрического экстремума как вычислительной задачи.

Этот метод, в целом, не требует определенного выражения целевой функции, но, несмотря на это, разрешает исследовать на свойства экстремума целевую функцию как квазиэмпирическую функцию.

Так как мы исходим из того, что ученики являются новичками в использовании геометрического компьютерного инструмента, мы предоставляем в распоряжение экранные конфигурации вместе с текстами задач как “интерактивных рабочих листов” (Schumann 1998), которые также могут применяться для демонстрационных целей. Использование таких рабочих листов предлагает первый подход в динамической трактовке геометрических задач экстремума.

Применение электронных таблиц для экспериментальной методики решения геометрических задач на экстремум или задач экстремума, которые могут быть смоделированы геометрически, мы не считаем подходящим по следующим причинам:

- данная геометрическая фигура не может быть представлена адекватно;
- первоначально должна быть установлена целевая функция;
- целевая функция может быть записана только в виде чуждой общепринятой форме записи;
- при некоторых условиях множество численных данных создает опасность нагромождения цифр, в котором можно и не увидеть экстремальное свойство геометрической фигуры.

Для уменьшения объема расчетов в решении сформулированных задач экстремума как **вычислительных задач** мы применим систему компьютерной алгебры Derive. Определение и обработка целевой функции является эвристическим процессом, при котором система компьютерной алгебры может играть лишь вспомогательную роль. Как определить точку экстремума неквадратичной целевой функции, не применяя дифференциальное исчисление? Вроде бы неравенство арифметического и геометрического среднего является надежным и элементарным инструментом в решении задач экстремума? Но этот метод должен быть подготовлен для использования в основной школе (в которой задачи экстремума еще сегодня являются дополнительным материалом!) Кроме того, использование этого метода непривычно или очень трудно, и не поддается алгоритмизации. Поэтому мы предлагаем метод решения, который лучше вписывается в контекст обычного урока математики основной школы и готовит к определению бесконечно малых в средней школе и который имеет значение в истории математического образования.

Экскурс:

Пусть $x \to f(x)$ непрерывная функция, для которой в точке x_m существует локальный экстремум и которая дифференцируема в точке x_m.

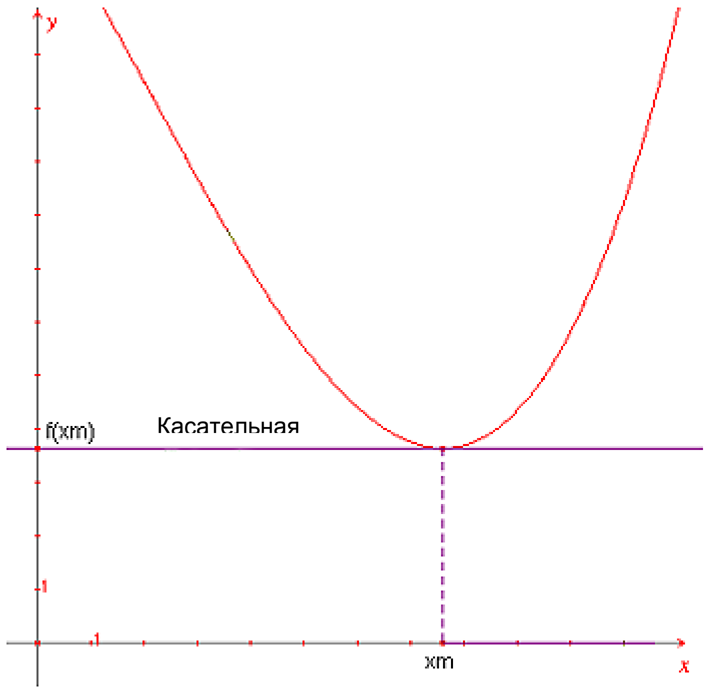


Рис. 2.1

В точке экстремума (xm; f(xm)) существует горизонтальная касательная (рис. 2.1), которая может быть рассмотрена как граничное положение секущей тремя способами.) (рис. 2 a/b, 3 a/b, 4 a/b). Все три случая приводят к элементарному вычислению абсциссы экстремума x_m.
Первая возможность (рис. 2.2 a/b), когда секущая проходит через точку экстремума, иллюстрирует определение точки экстремума по методу Ферма (1601-1655): пусть $f(x_m+d) - f(x_m) \approx 0$ для достаточно малого d; деление этого равенства на $d \neq 0$ дает существенное уравнение, в котором d приравнивается к 0 для граничного положения секущей).
Во втором случае (рис. 2.3 a/b) секущая проходит через две точки графика функции, абсциссы которых равноудалены от точки экстремума: $f(xm+d) - f(xm-d) \approx 0$ для достаточно малого d; после деления на d и подстановки d=0 получаем уравнение для определения x_m.
Рассмотрим горизонтальную секущую в третьем случае (рис. 2.4 a/b): пусть $f(x+d) - f(x-d) = 0$; деление на $d \neq 0$ дает уравнение, которое при подстановке d=0 дает уравнение для определения x_m.
Этот метод возвращает к Шельбаху (1804-1892). (Для целочисленной рациональной функции разность $f(x + d) - f(x - d)$ имеет степень на один порядок ниже, поэтому точное решение можно получить для целочисленной рациональной целевой функции до пятого порядка). Дробно-рациональную целевую функцию можно сделать целочисленной. Конечно же трудности возникают в случае корневых целевых функций.)
Во всех трех случаях равенство для определения дает только те точки, в которых существует горизонтальная касательная. Необходимо выбрать то местоположение, в которых существует экстремум.

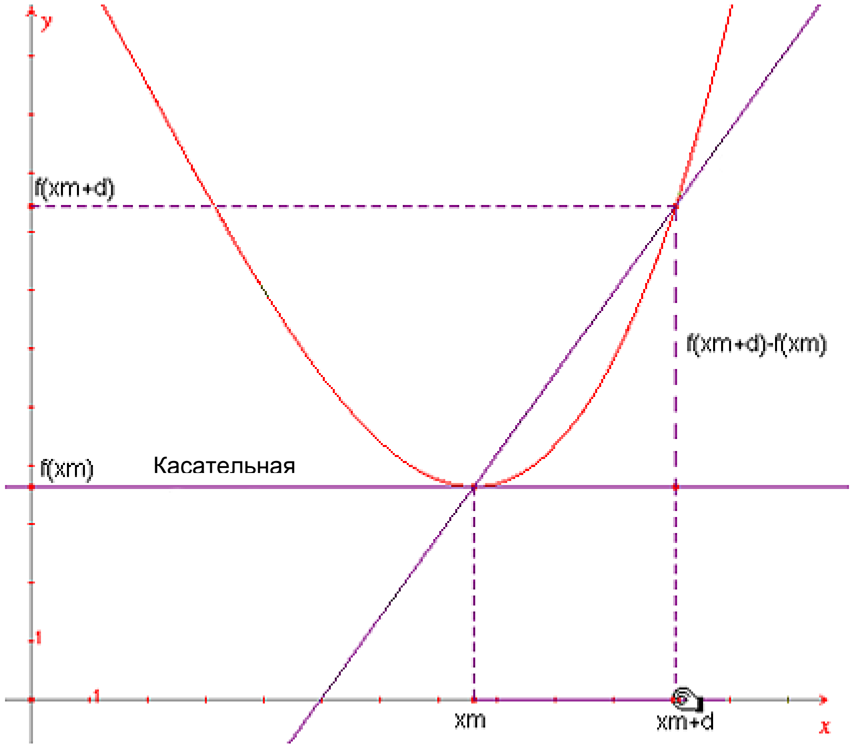


Рис. 2.2 a

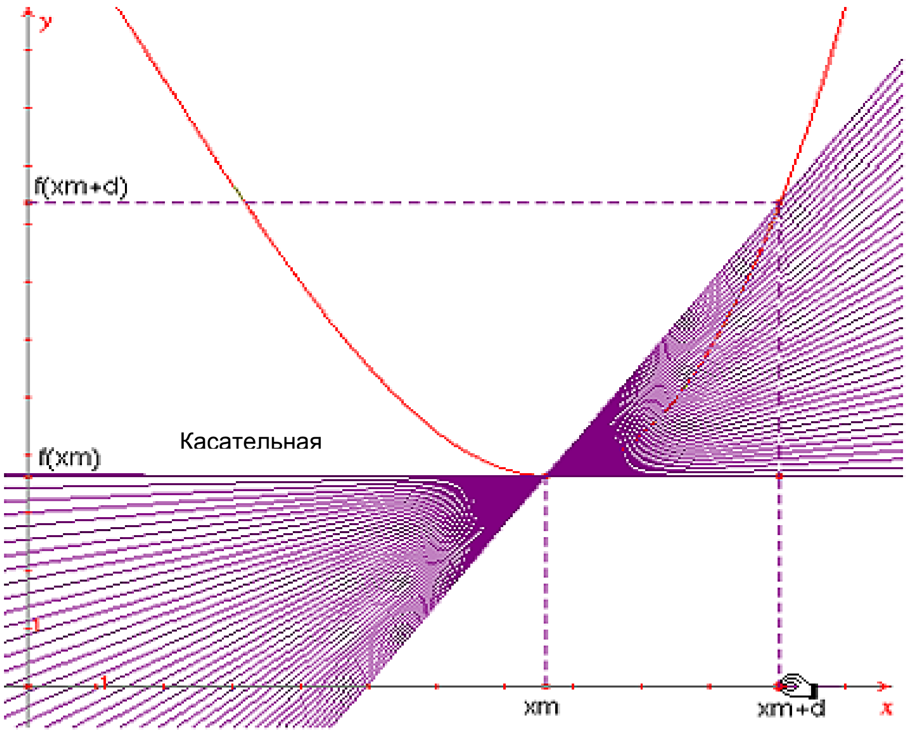


Рис. 2.2 b

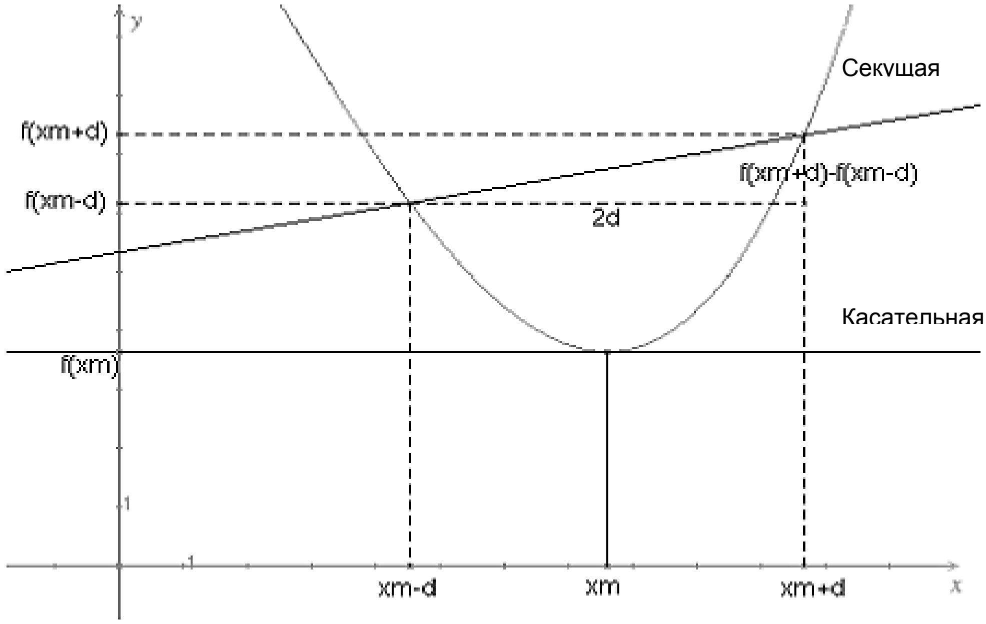


Рис. 2.3 a

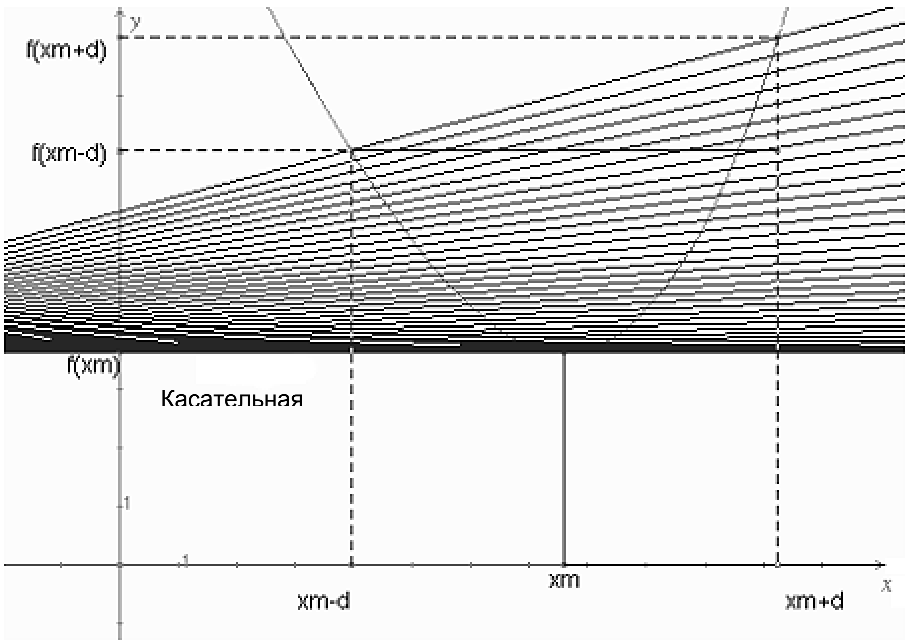


Рис. 2.3 b

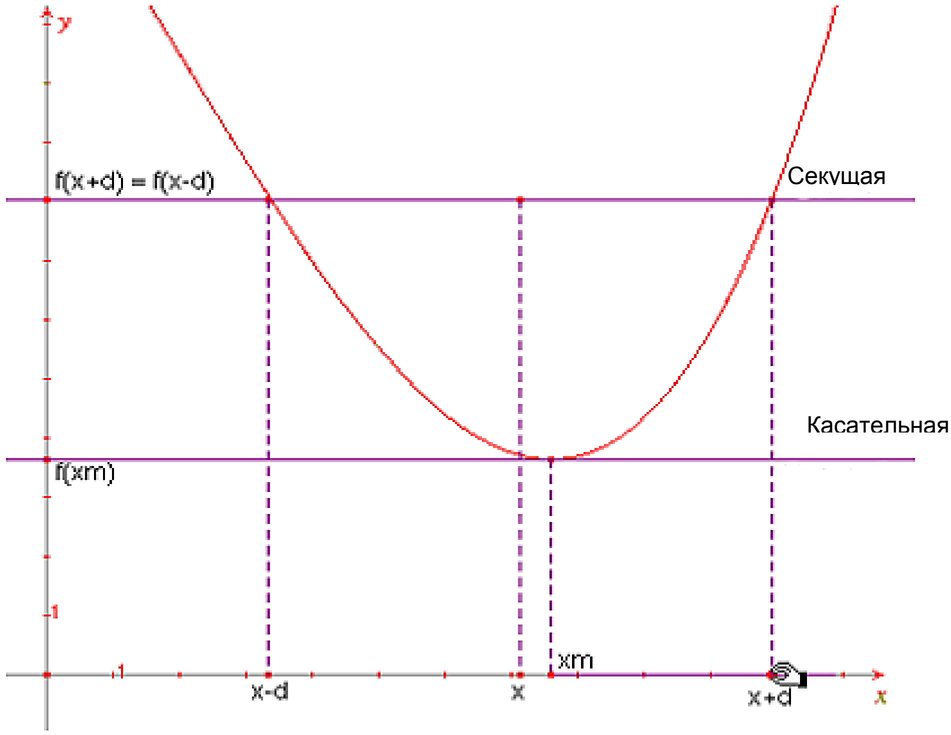


Рис. 2.4 a

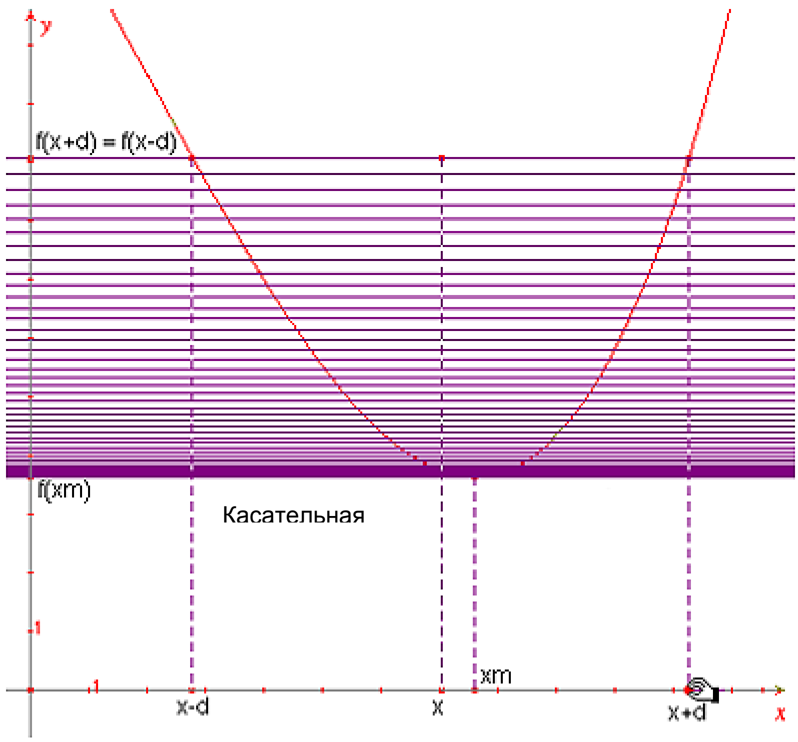


Рис. 2.4 b

Далее мы применяем метод Шельбаха, так как его можно сделать понятным для школьников, поскольку он вытекает из уравнения, и поэтому, не нуждается в предположении “для достаточно малых d” или “в достаточно малой окрестности точки x_m”.

Имеется следующий метод расчета точек экстремума и значений экстремума (дифференциальный метод по Шельбаху):

(1) Определить целевую функцию f(x) (принимая во внимание граничные условия)
(2) Построить равенство $f(x + d) - f(x - d) = 0$
(3) Вынести за скобки d и разделить на $d \neq 0$.
(4) Получить уравнение для определения x_m: d приравнять к нулю.
(5) Решить уравнение точно (или приближенно).
(6) Вычислить значение экстремума, подставляя значение x_m в f (x)
(Проверка допустимых решений в контексте задачи)
(7) Рассчитать другие искомые величины.

2.3 Пример использования компьютера для «открытия» и решения задач экстремума

Мы продемонстрируем методы, изложенные во введении на двух примерах, один без, а другой с граничными условиями.

Предварительное замечание: при решении с помощью систем динамической геометрии компьютерной алгебры мы применим программные средства только по мере необходимости. Для получения более подробной информации о программных средствах следует обратиться к соответствующим справочникам.

Пример 2.1 (Объем открытой коробки)

На углах прямоугольника ABCD вырезаются одинаковые квадраты. Таким образом, возникает развертка коробки.
Исследуйте объем коробки в зависимости от величины квадрата (перемещайте Z).
Измените также форму прямоугольника (перемещайте B и D).

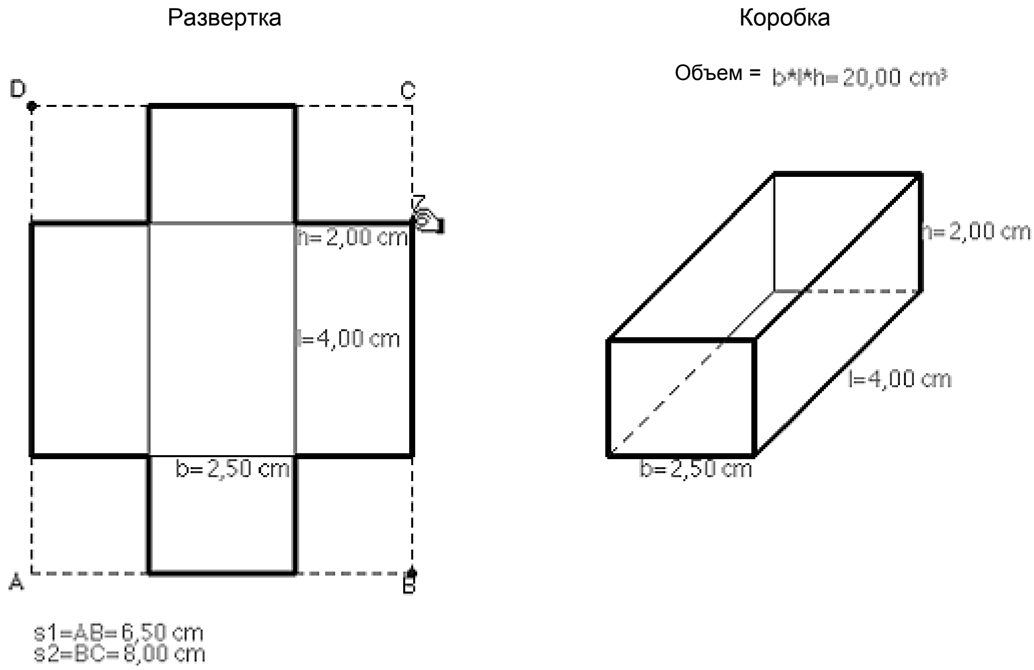


Рис. 2.5

На рисунке 2.5 изображен интерактивный рабочий лист, на основе которого учащиеся могут установить, что объем коробки, меняется в зависимости от величины вырезанных квадратов; курсор в виде руки указывает при этом на перемещаемую точку, с помощью которой варьируется величина независимой переменной (рис. 2.6).

Уже сейчас можно обнаружить, что объем принимает максимальное значение между h = 0 и h = s_1. Для того чтобы проанализировать данные независимой величины h и зависящего от нее объема, они могут быть внесены в таблицу (рис 2.7). Это подтверждает предположение, что между граничными значениями h имеется максимум.

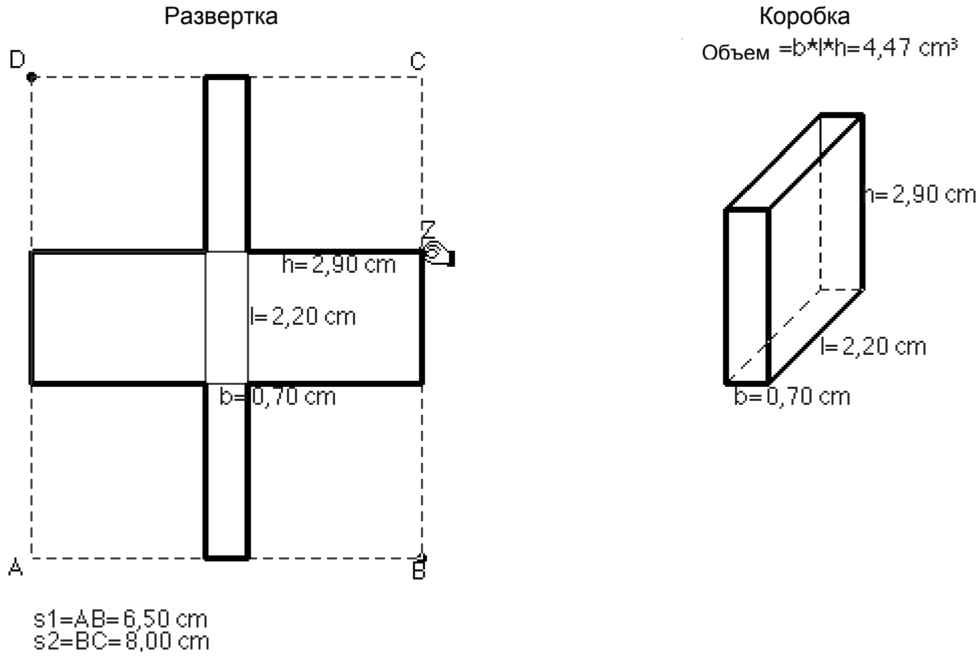
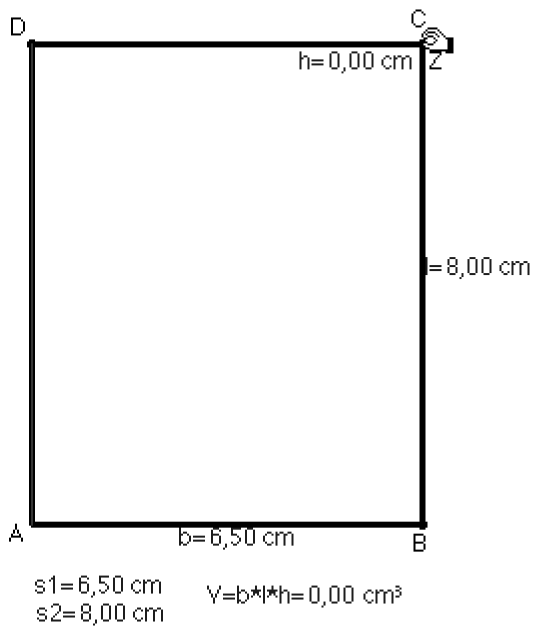


Рис. 2.6



	h=	V=b*l*h=
1	3,25	0,00
2	2,90	4,47
3	2,63	8,88
4	2,33	14,26
5	2,13	17,79
6	1,90	21,55
7	1,70	24,24
8	1,53	25,97
9	1,37	27,11
10	1,10	27,43
11	0,87	25,89
12	0,73	24,12
13	0,53	20,09
14	0,37	15,36
15	0,23	10,61
16	0,00	0,00
17		
18		

Рис. 2.7

Предположение о существовании только одного максимума подтверждается графиком функции $h \to V(h)$ как следа движения точки $(h, V(h))$, когда варьируется высота развертки h (рис.2.8).

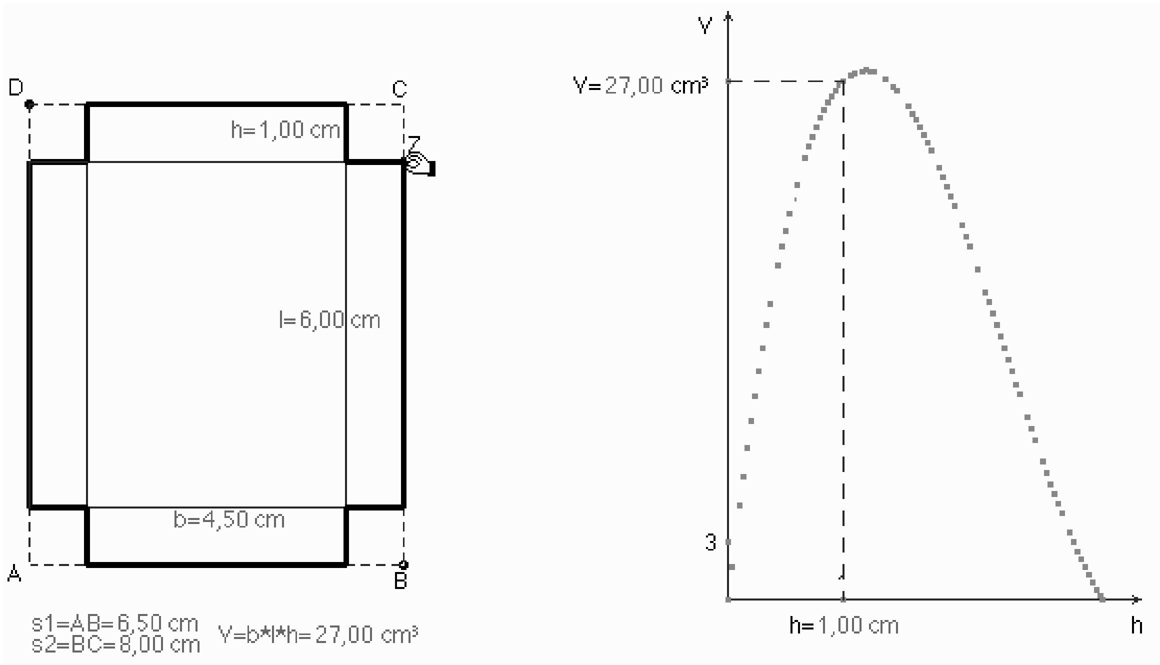


Рис. 2.8

Кривая графика возникает перед глазами учащихся как трассированная линия из точек. След из трассирующих точек, является только одним из возможных графических представлений на экране компьютера, заменяется полноценным непрерывным графиком, по которому можно довольно хорошо определить максимум на глаз $h_{max} \approx 1{,}20$ см, $V_{max} \approx 27{,}55$ см^3 (рис. 2.9).

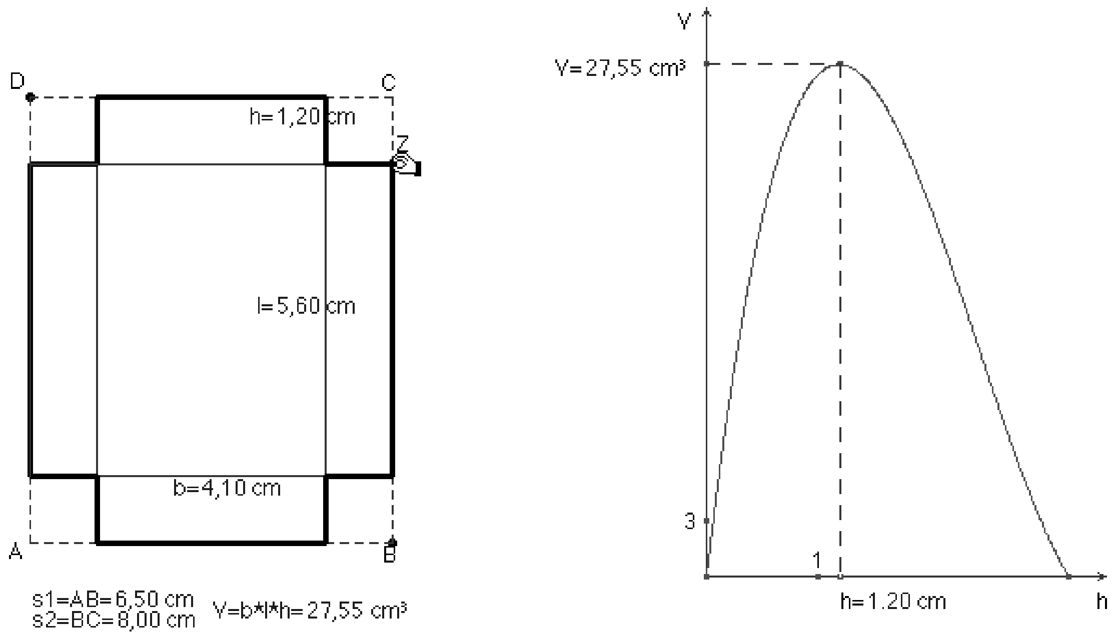


Рис. 2.9

Итак, необходимо решить (точно) следующую вычислительную задачу: при каком размере h достигается максимальный объем коробки, если размеры прямоугольника упаковки s_1 = 6,50 см и s_2 = 8,00 см.

Определим стремящуюся к максимуму целевую функцию: получается выражение кубической функции: V(h) = (6,5 - 2 h) (8 - 2 h) h·. Построим горизонтальную секущую через кривую V(h): V(h + d) – V(h - d) = 0 (рис. 2.10a).

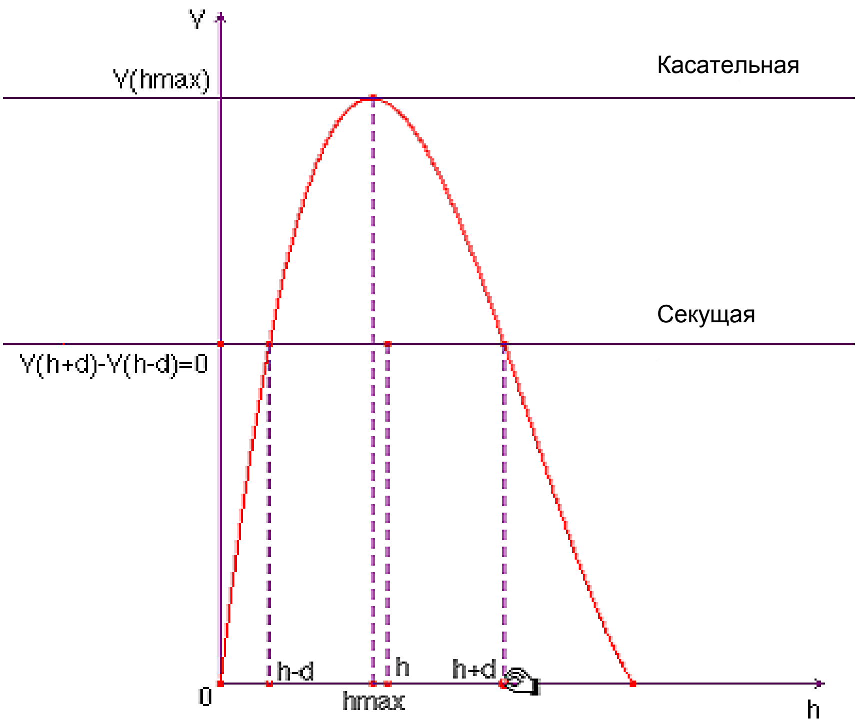


Рис. 2.10 a

При уменьшении d, горизонтальная секущая приближается к горизонтальной касательной в точке максимума (рис. 2.10), а средняя точка соответствующей хорды проходит через точку экстремума (рис. 2.10c). Это означает, что в упрощенном уравнении V(h + d) – V(h - d) = 0 надо d на 0, чтобы получить уравнение для определения h_{max} (сравните строки 7-11 выражения 2.1)

Ниже мы проводим вычисления h_{max} ,V(h_{max}) и других величин полностью с помощью программы Derive. При этом используются только следующие команды Derive: упростить, факторизировать, заменить, решить, аппроксимировать.

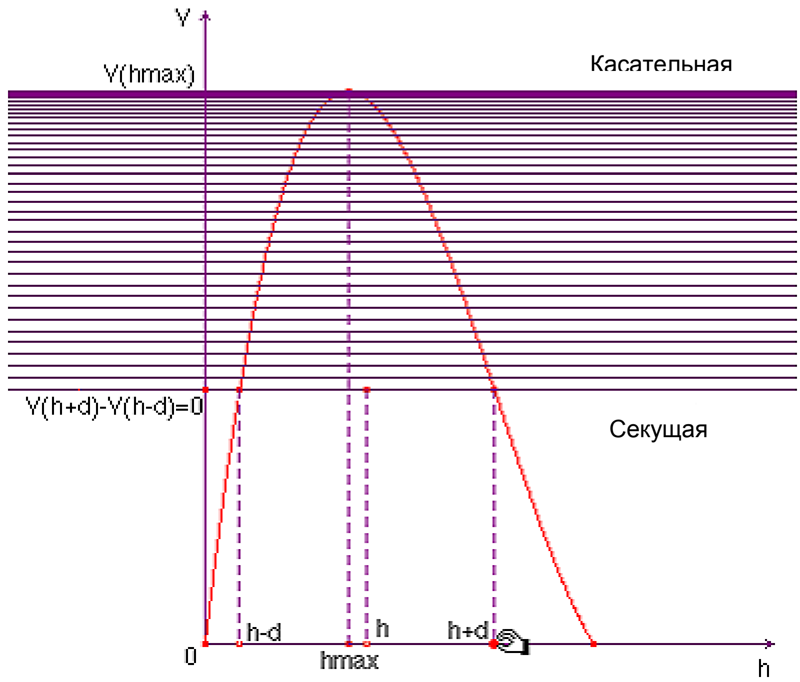


Рис. 2.10 b

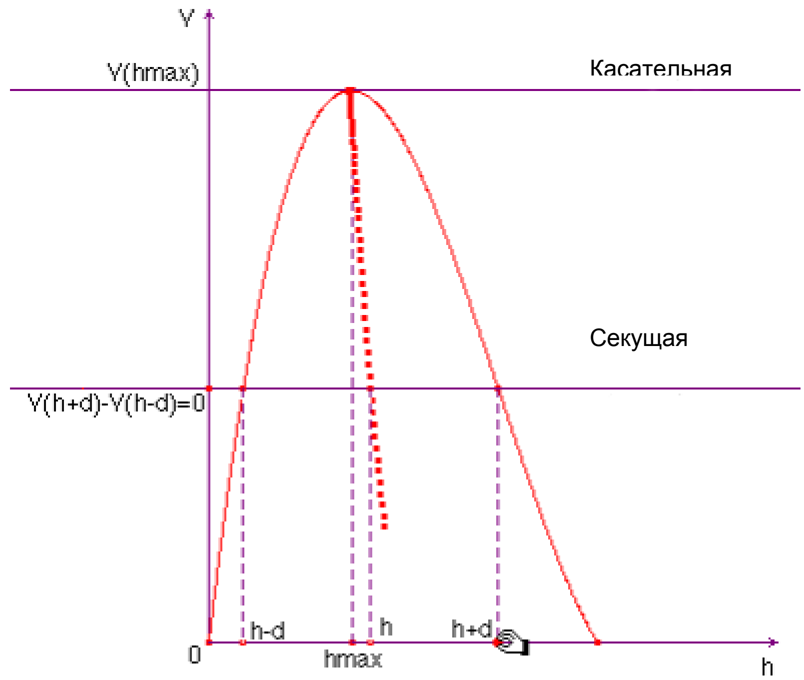


Рис. 2.10 c

Задокументированный путь решения показан в листинге 2.1. (Для упрощения записи обозначение h_{max} заменено h_m).

(Более сложное решение такой задачи с помощью неравенства арифметического и геометрического среднего предложено Натансоном (1966)).

Решение уравнения с помощью DERIVE (листинг 2.1):

#1: " Объем коробки: "

#2: $V(h) := (6.5 - 2\ h)\ (8 - 2\ h)\ h$

#3: " Пишем уравнение секущей "

#4: $V(h + d) – V(h – d) = 0$

#5: $8\ d^3 + d\ (24\ h^2 – 116\ h + 104) = 0$

#6: " Выносим за скобки d"

#7: $4\ d\ (2\ d^2 + 6\ h^2 - 29\ h + 26) = 0$

#8: " Делим на 4d "

#9: $2\ d^2 + 6\ h - 29\ h + 26 = 0$

#10: " Заменяем d на 0 "

#11: $2\ 0^2 + 6\ h^2 – 29\ h + 26 =0$

#12: $6\ hm^2 – 29\ hm + 26 = 0$

#13: " Решаем уравнение "

#14: $hm = \frac{\sqrt{217}}{12} + \frac{29}{12}$

#15: $hm = \frac{29}{12} - \frac{\sqrt{217}}{12}$

#16: " Приближенные значения "

#17: hm = 3.64424

#18: hm = 1.18909

#19: " Определяем значение функции в экстремуме "

#20: $V\left[\frac{\sqrt{217}}{12} + \frac{29}{20}\right]$

#21: $\frac{2755}{216} - \frac{217\sqrt{217}}{216}$

#22: "Приближенное значение"

#23: -2.04448

#24: " Решение бессмысленно "

#25: $V\left[\frac{29}{12} - \frac{\sqrt{217}}{12}\right]$

#26: $\frac{217\sqrt{217}}{216} + \frac{2755}{216}$

#27: "Приближенное значение"

#28: 27.5537

#29: " Максимальный объем"

#30: $Vmax = 27.5537\ cm^3$

#31: hmax = 1.18909 cm

#32: bmax = (6.5 – 2*1.18909) cm

#33: bmax = 4.12182 cm

#34: lmax = (8 – 2*1.18909) cm

#35: lmax = 5.62182 cm

Листинг 2.1

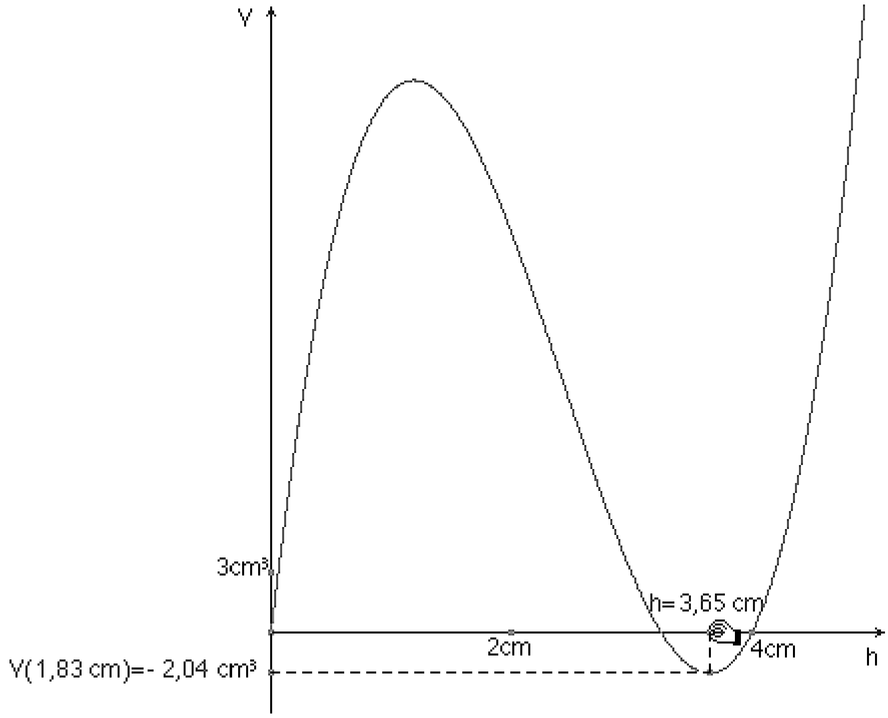


Рис. 2.11

Значения, определенные приближенно с помощью программ компьютерной геометрии могут служить для контроля приближенных значений, полученных компьютерной алгеброй. Значение экстремума в стоке 21 является минимальным значением, оно может быть определено по графику V(h) при увеличении области определения (рис. 2.11). – Уравнение определения экстремума указывает на все точки, в которых существует горизонтальная касательная.

Для соответствующих общих задач экстремума Derive дает выражение:

$h_{max} = \frac{s_1 + s_2 - \sqrt{s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2}}{6}$; из этого следует условия решения: s_1>o,s_2>o, как и предполагалось.

(Метод Шельбаха был использован, хотя неявно, в предстоящем примере Appel (1993), он применяется также в баварском учебнике “Mathematik an Realschulen” (Habler E. et al. 1982). Уже в прусском учебнике Х.Мюллера “Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen” (1899) приведен и применен данный метод решения задач экстремума.

Пример 2.2 (**Площадь поверхности цилиндра при заданном объеме**)

На интерактивном рабочем листе (рис. 2.12) показана постановка задачи, экспериментальное решение которой должно доказать существование экстремума.

В приведенном графике для объема 100 cm^3 можно приблизительно определить минимум площади поверхности около 119,27cm^2 при $r \approx 2{,}5$ см (рис. 2.13). Также изменение заданного объема подтверждает существование минимума (рис. 2.14). Поэтому можно сформулировать следующую общую задачу экстремума:

Рассчитайте для кругового цилиндра, имеющего заданный объем, минимальную площадь поверхности, а также радиус основания и высоту цилиндра.

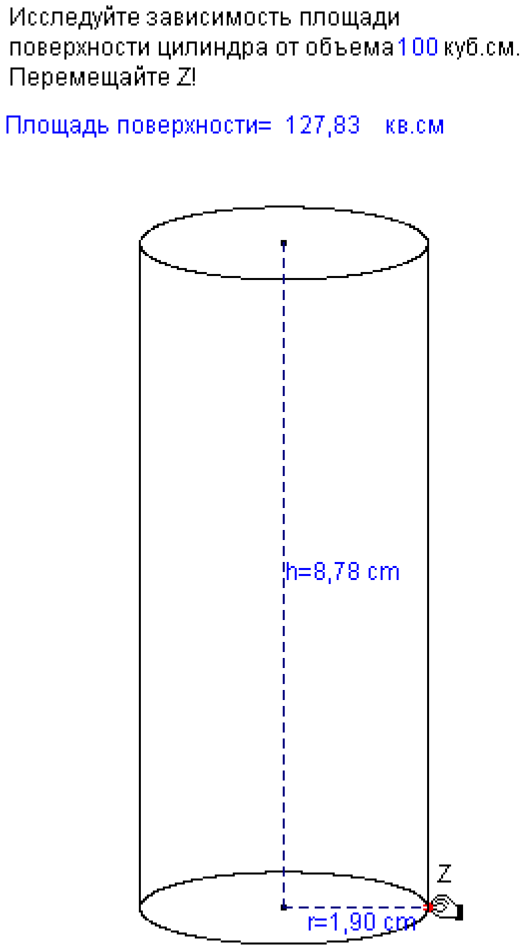
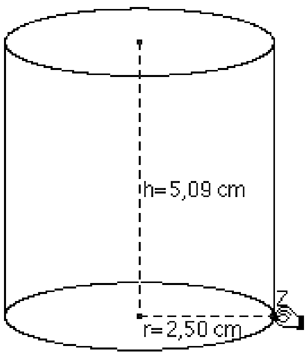


Рис. 2.12

Целевая функция является дробно-рациональной. Путь решения с помощью Derive представлен в листинге 2.2. Общее решение применим в конце для случая $V_0 = 100$ cm^3.

Исследуйте зависимость площади поверхности цилиндра объемом 100 куб.см.
Перемещайте Z!

Площадь поверхности =119,27кв.см.



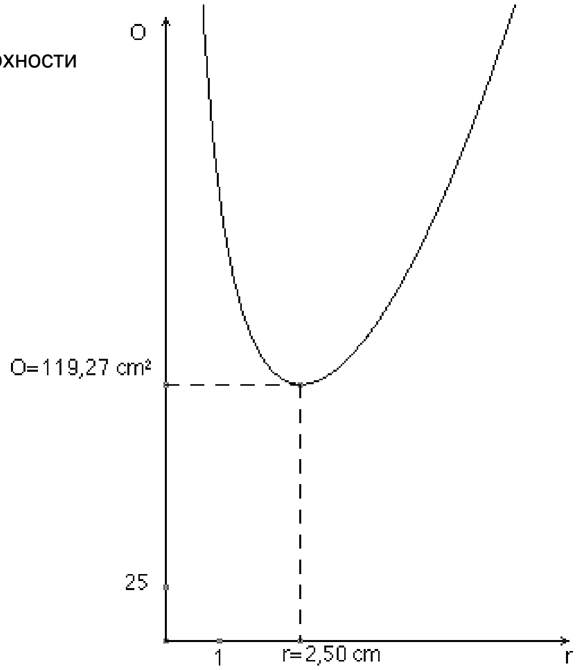
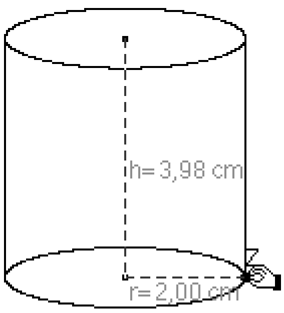


Рис. 2.13

Исследуйте зависимость площади поверхности цилиндра объемом 50 куб.см.
Перемещайте Z!

Площадь поверхности =75,13кв.см.



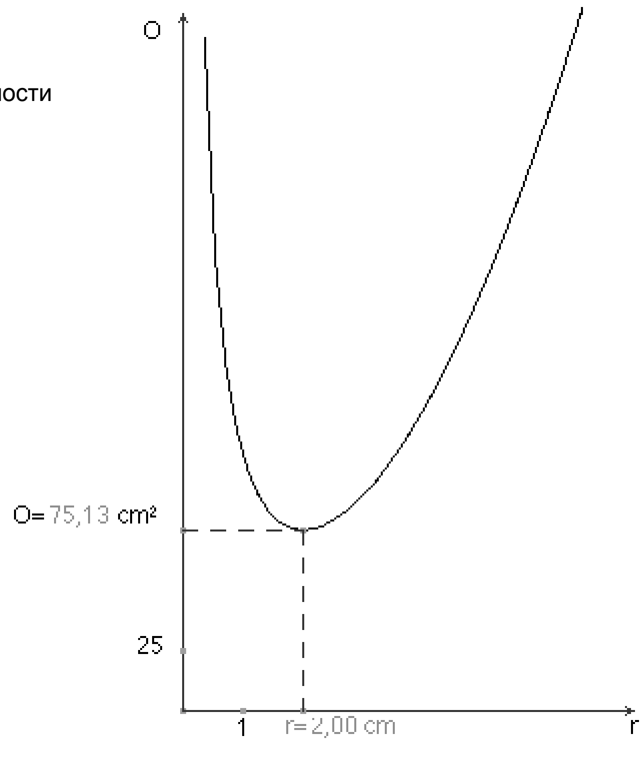


Рис. 2.14

Решение вычислительной задачи с помощью DERIVE (листинг 2.2).

#1: " Формула площади цилиндра "

#2: $O = 2\pi r (r + h)$

#3: "Формула объема для цилиндра "

#4: $Vo = \pi r^2 h$

#5: "Решаем для h"

#6: $h = \dfrac{Vo}{\pi^2}$

#7: "Заменяем в формуле площади h "

#8: $O = 2\pi r \left[r + \dfrac{Vo}{\pi r^2} \right]$

#9: " Упрощаем выражение "

#10: $O = \dfrac{2(Vo + \pi r^3)}{r}$

#11: " Определяем функцию цели "

#12: $O(r) := \dfrac{2(Vo + \pi r^3)}{r}$

#13: " Пишем уравнение секущей "

#14: $O(r + d) - O(r - d) = 0$

#15: $\dfrac{4d(Vo + 2\pi r(d + r)(d - r))}{(d + r)(d - r)} = 0$

#16: " Второй множитель приравниваем к нулю "

#17: $Vo + 2\pi r(d + r)(d - r) = 0$

#18: "Заменяем d на 0 "

#19: $Vo + 2\pi r(0 + r)(0 - r) = 0$

#20: $Vo - 2\pi rmin^3 = 0$

#21: “Решаем уравнение относит. r”

#22: $rmin = \dfrac{2^{2/3} Vo^{1/3}}{2\pi^{1/3}}$

#23: "Определяем минимальное значение оверхности "

#24: $O\left[\dfrac{2^{2/3} Vo^{1/3}}{2\pi^{1/3}} \right]$

#25: $3\, 2^{1/3} \pi^{1/3} Vo^{2/3}$

#26: $Omin = 3\, 2^{1/3} \pi^{1/3} Vo^{2/3}$

#27: "Высота цилиндра"

#28: $h = \dfrac{Vo}{\pi \left[\dfrac{2^{2/3} Vo^{1/3}}{2\pi^{1/3}} \right] 2}$

#29: $hmin = \dfrac{2^{2/3} Vo^{1/3}}{\pi^{1/3}}$

#30: "Для Vo = 100 получаем"

#31: $rmin = \dfrac{2^{2/3} 100^{1/3}}{2\pi^{1/3}}$

#32: "Приближенное значение"

#33: rmin = 2.51539

#34: $Omin = 3\, 2^{1/3} \pi^{1/3} 100^{2/3}$

#35: "Приближенное значение"

#36: Omin = 119.265

#37: $hmin = \dfrac{2^{2/3} 100^{1/3}}{\pi^{1/3}}$

#38: "Приближенное значение"

#39: hmin = 5.03079

Листинг 2.2

2.4 Заключительные примечания

Примечание 1:

В то время как экспериментальный метод помогает «открыть» и решить задачу экстремума с помощью системы динамической геометрии методом проб и ошибок, система компьютерной алгебры должна планомерно и систематически внедряться для точного решения общих задач экстремума. Оба подхода дополняют друг друга.

Примечание 2: Решение задач экстремума с помощью программ динамической компьютерной геометрии возможно с 7 класса, так как равенство или выражение целевой функции не должно устанавливаться явным образом. С 9 класса уровень математических знаний позволяет введение и применение метода дифференциальных разностей с помощью или без помощи компьютерной алгебры.

Примечание 3: Решение задач экстремума с помощью системы компьютерной алгебры является вкладом в процесс внедрения компьютерной алгебры в уроки математики основной школы.

2.5 Список литературы

Appel, H. (1993):	Anwenden und Üben von Lerninhalten mit Hilfe des Programmes DERIVE. In: Computer und Unterricht, Heft 9, S. 57-61
Dörr, R. (1989):	Extremwertaufgaben erst ab Klasse 11? In: Mathematik in der Schule (27), Heft 10, S. 688-698
Glatfeld, M. (1989):	Bemerkungen zur Extremwertbestimmung kubischer Funktionen. In: Praxis der Mathematik (26) 1984, Heft 9, S. 267-270
Fermat, P. (1629)	Abhandlungen über Maxima und Minima. Aus dem Lateinischen von Max Miller. Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften.- Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1934
Glatfeld, M. (1989):	Bemerkungen zum Thema "Extremwerte" in den Klassenstufen 9 und 10. In: mathematik lehren, Heft 37 (1989), S. 19-22
Habler, E. et al. (1982):	Mathematik für Realschulen. MR10, Gruppe 1. Frankfurt am Main: Diesterweg, S. 178

Heugl, H. (1996):	Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen. Bonn: Addison-Wesley
Kutzler, B. (1995):	Matehmatik unterrichten mit DERIVE. Bonn: Addison-Wesley
Laborde, J.-M.; Bellmain, F. (1996):	Cabri Géomètre II. Version 1.0 - Dallas/USA u. Freising: Texas Instruments. (Deutsche Oberfläche und Bearbeitung des Handbuchs von H. Schumann)
Müller, H. (1899)	Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen, A II, Oberstufe. -Leipzig: Teubner
Natanson, I. P. (1966):	Einfachste Maxima- und Minima-Aufgaben. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 27/28
Rüthing, D. (1998):	Computerunterstütztes Experimentieren und erklärendes Theoretisieren anhand eines komplexen Extremwertproblems. In: Mathematik in der Schule (36), Heft 11, S. 615-630
Schönbeck, J.; Schupp, H. (Hg.) (1978):	Mathematisches Unterrichtswerk PLUS, 9.Schuljahr. - Paderborn: Schöningh
Schellbach, K.H. (1860)	Mathematische Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten.- Berlin:G. Reimer
Schulz, M. (1989):	Einige Gedanken zur gegenwärtigen und künftigen Behandlung von Extremwertaufgaben. In: Mathematik in der Schule (27), Heft 11, S. 745-753
Schumann, H. (1991):	Experimentelles Lösen einfacher isoperimetrischer Probleme in einer interaktiven computergrafischen Lernumgebung. In: Didaktik der Mathematik (19), Heft 3, S. 227-241
Schumann, H. (1992):	Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. -Stuttgart: Metzler u. Teubner
Schumann, H. (1997):	Neue Standards für das Lösen geometrischer Berechnungsaufgaben durch Computernutzung. In: MNU (50), Heft 3, S. 172-175
Schumann, H. (1998):	Dynamische Behandlung elementarer Funktionen In: Mathematik in der Schule (36), Heft 3, S. 172-188
Schumann, H. (1998):	Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. In: Mathematik in der Schule (36), Heft 10, S. 562-569
Schumann, H. (1998):	Geometrische Extremwertaufgaben in dynamischer Behandlung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (30),Nummer 6, S. 215-223
Schupp, H. (Hg.) (1997):	Optimieren. Themenheft mathematik lehren Nr. 81 (April 1997)