1 Геометрические задачи экстремума в динамической трактовке

“Так как устройство Вселенной превосходно, и оно происходит от самого мудрого творца, ничто в мире не встречается, из чего не явствовало какое-нибудь максимальное или минимальное свойство.”

Леонард Эйлер (1707 - 1783)

1.1 Введение

Оптимизация, к которой относятся задачи нахождения экстремумов, являются базовыми для обучения математики (Schupp 1997). Построение математических моделей для задач оптимизации - один из объектов изучения прикладной математики. Так, например, на уроках математики в основной и средней школе обсуждается линейная оптимизация в IR^2 / IR^3 , которая имеет практическое применение. К сожалению, класс красивых и часто используемых изопериметрических задач, в которых речь идет о максимизации емкости фигур с заданным периметром или площадью, на уроках математики не рассматриваются. Для решения реальных задач, которые решаются в вариационном или операционном исчислении, недостаточно ни времени урока, ни математических методов и моделей линейной оптимизации.

Интересный обзор методических разработок для задач на нахождение максимума и минимума дают «классические» дидактические работы Rademacher/Toeplitz (1930), Pólya (1962) и Courant/Robbins (1962); более новые дидактические монографии об элементарных трактовках задач экстремумов написаны Quaisser/ Sprengel (1986), Claus (1992) и Schupp (1992). Но содержание задач бедно по сравнению той совокупности задач, которые могут быть решены с помощью дифференциального исчисления функций действительной переменной и которые собирались в течение столетия, начиная с медленного внедрения понятия бесконечно малых величин в гимназиях (после принятия Меранской программы в 1905 году).[1]

[1] Под руководством Ф.Клейна на смене веков началось движение реформирования школ на основе а) согласования учебных планов со степенью интеллектуальной зрелости ученика, б) развития математических навыков и навыков абстрагирования на основе природных явлений, в) обобщения учебного материала, основываясь на понятиях функции и отображения.

Наряду с названными задачами определения функций, задачи экстремума используются в рамках уроков математики при обсуждении свойств функций. При этом учебники, составленные согласно школьному плану старших классов гимназии, выявляют следующие недостатки при постановке задач: ограничена наглядность, используются только законченные и хорошо решаемые задачи (не возникает проблемы существования решения); агломерация задач (задачи не структурированы); вызывающие вопросы формулировки (так называемые «фантазийные» задачи); слишком мало задач предназначенных для математического моделирования; менее представлены задачи нахождения минимума; пренебрежение эвристическим аспектом (решение задач по аналогии, обобщением и др.); отсутствуют задачи, указывающие на границы решений, полученных школьными методами дифференциального исчисления.

Методам решения задач экстремума присуща шаблонность, без должного анализа выбранного метода и связи с другими методами (по крайней мере, это относится к задачнику «Исчисление бесконечно малых» (Keil et al. 1991); в качестве хорошего примера, в этой связи, можно назвать, к сожалению, больше не распространяемый учебник (Danckwaerts 1991). Шаблон решения применяется даже к решению квадратного уравнения, несмотря на множество задач, которые решаются элементарно методом неравенства арифметического и геометрического среднего.

В конечном счете, перечисленные здесь недостатки являются следствием традиционной программы, в которой учитель, дабы быть признанным «хорошим учителем», находясь под давлением времени и материала, нацелен на хорошие результаты выпускного экзамена своего класса. Вопрос о математическом образовании уже очень давно больше не ставится! Поэтому предложения по улучшению культуры решения математических задач включают также методы решения открытых задач (например, Open-ended Approach по Becker/Shimada, 1997).

Другим недочетом занятий по анализу является отсутствие интеграции с использованием компьютерных программ, таких как Derive, Maple, Mathematica с помощью которых можно автоматизировать решение задач на максимум и минимум.

Первую интересную концепцию интеграции Derive в учебный процесс предложил (Baumann 1998) в своем проблемно-ориентированном методе преподавания .

1.2. Динамический метод

Перейдем к рассмотрению использования динамической компьютерной графики для решения геометрических задач на максимум и минимум.

Геометрические задачи экстремума, или задачи экстремума, которые могут быть решены геометрически, составляют большую часть совокупности задач экстремума. Они предполагают владение численными методами решения планиметрических и стереометрических задач основной школы. В рамках циклически развивающейся школьной программы геометрические задачи средней школы являются продолжением задач на вычисление. В традиционном изложении геометрические фигуры, которые должны помочь решить вычислительные задачи, являются неподвижными. За исключением учебных мультипликационных фильмов, которые обычно иллюстрируют одну геометрическую теорему, мультипликация с помощью серии статических рисунков недостаточно оживляет фигуру.

Директор реальной гимназии им. Гете в Карлсруе Peter Treutlein, сформулировал уже в 1911 году требования о подвижности фигур следующим образом:

«*Одним из основных различий старой греческой и современной геометрии считается то, что в той (греческой), все фигуры даны жесткими, неподвижными и твердыми, а в другой (новой) воспринимаются подвижными и в определенной степени текущими, **в постоянном переходе из одной формы в другую**. Если наши ученики должны быть введены в современную науку, и уметь ее применять, то они должны привыкать думать о фигурах как о переменных и учитывать взаимосвязь их частей, воспринимать его и доказывать. Необходимо отказаться от восприятия фигур как жестких и плоских структур. Единственное, что необходимо - сделать подвижными части фигур...*»

Понимание геометрических задач экстремума предполагает использование индивидуального опыта в том смысле, что при трансформации фигур может меняться соотношение размеров геометрических фигур и их частей. Такой опыт сегодня можно приобрести, работая с изображениями фигур на экране, которые можно непрерывно изменять. Мы предполагаем, что динамические представления о переменных фигурах образуются на основе визуально наблюдаемых трансформаций фигур.

Непосредственная манипуляция с геометрическими трансформациями фигур – существенная характеристика так называемой динамической геометрии или геометрией в режиме движения (см. Schumann 1992) – Для создания таких экранных изображений мы используем прекрасное и геометрически содержательное программное обеспечение для школьной планиметрии как Cabri-Géomètre II (Laborde 1996).

CABRI II предоставляет новую методику исследования функциональных свойств геометрических фигур: мы можем проводить измерения сконструированных геометрических фигур, образовывать из полученных измеренных величин математические выражения, количественно описывать функциональные свойства (например, соотношения между длинами, площадями, углами; для определенных стандартных выражений можно создать даже макрокоманды. При изменении фигуры в режиме ручной анимации мы изменяем одновременно измеряемую и на его основе и в соответствии с ним вычисляемую величину, которую нам в процессе изменения фигур и подлежит исследовать. Функциональное свойство может быть предоставлено дополнительно в таблице значений или, в случае свойства, зависящем от одного параметра, в виде графика эмпирической функции.

Из такого рода возможностей исследовать функциональные свойства фигуры вытекает следующий метод обнаружения и приближенного определения экстремальных значений:

(1) конструкция геометрической фигуры, которая удовлетворяет граничным условиям.
(2) изменение значений одной из независимых величин фигуры или части фигуры при одновременном наблюдении функциональной зависимости: независимая величина - зависимые величины (совокупность данных в таблице; визуальное представление в графике;
(3) распознание экстремального свойства (приближенное определение места и значения экстремума);

(4) изменение параметра фигур и проверка инвариантности экстремума.
(5) формулировка общей задачи геометрического экстремума.

После этих этапов можно приступить к точному решению с помощью дифференциального исчисления (например, с использованием программ компьютерной алгебры) или элементарными методами. Метод является преформальным, так как он не требует определить целевую функцию, но в то же время позволяет исследовать ее свойства экстремума как эмпирически известной функции. Тем самым этот метод может быть использован в средней школе.
Исходя из того, что учащиеся являются новичками в использовании инструментов программ динамической геометрии, экранные конфигурации представляются вместе с текстом задач как “интерактивные рабочие листы” (Schumann, 1998), которые можно использовать для демонстрационных целей. Применение таких рабочих листов - это первый шаг в динамической трактовке геометрических задач экстремума.

1.3. Примеры динамических моделей

Ниже мы проиллюстрируем на примерах методы динамической трактовки геометрических задач на экстремум.
Предварительное замечание: понимание динамического представления, проводимом на экране, на основе распечатки экранных изображений, не развивает воображения, которое как раз стимулируется компьютерной графикой. Поэтому печатные изображения не годны для объяснения динамических процессов на экране; более подходящим был бы Internet-документ (Applet), который разрешал бы читателю непосредственно работать с изображением. Еще лучшим было бы, конечно, иметь в распоряжении электронный “интерактивный школьный учебник”.
На примере 1.1 мы поближе ознакомим с наиболее существенными возможностями динамической трактовки, которая применяется в других примерах только выборочно.

Пример 1.1 Задача о заборе

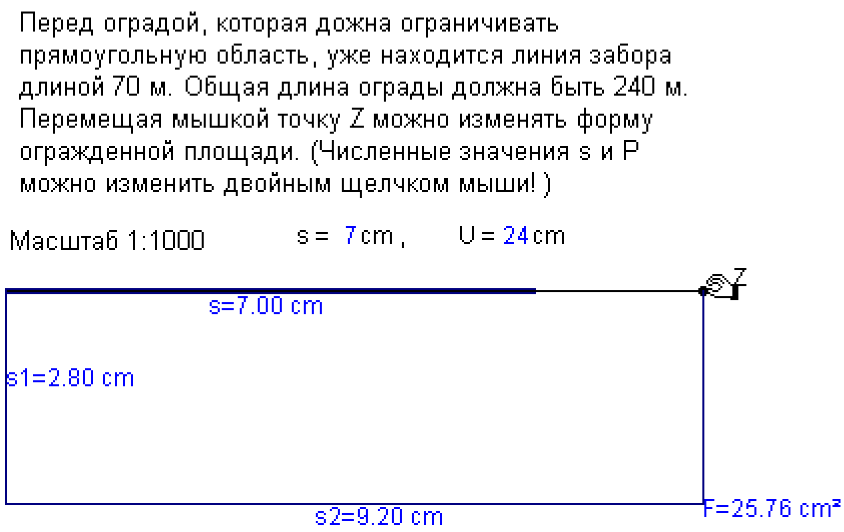


Рис. 1.1a

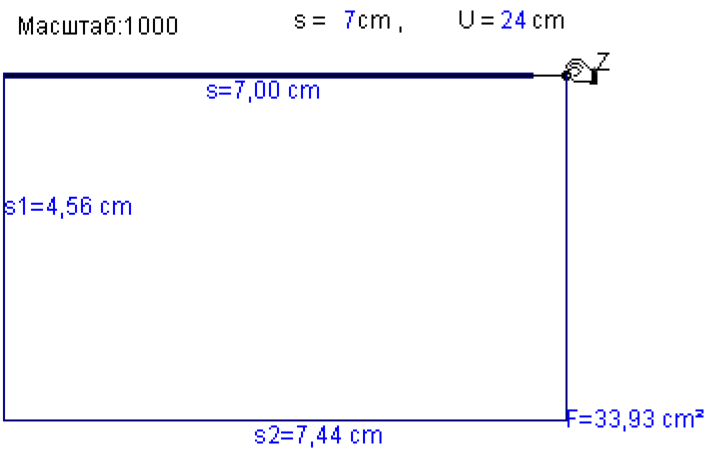
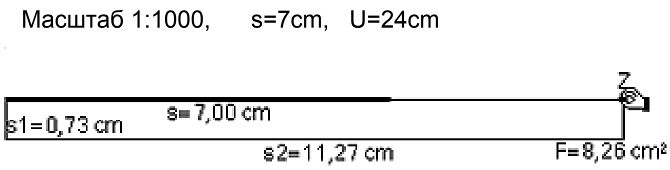


Рис.1.1b

На рисунке 1.1a видно условие задачи. При перетаскивании Z (обозначено держащей рукой) изменяется форма прямоугольника и длины сторон, но не периметр (рис. 1.1b); при этом может быть реализована даже нулевая длина сторон для s_1=0 см (измерение площади реализовано программно). Именно здесь пользователь интерактивного рабочего листа может установить, что величина площади уменьшается строго монотонно от s_2=s до и s_2=U/2, что максимальная площадь 3500 м^2 при размерах сторон 50м и 70м. Подвижность отдельных состояний затрудняет обозревать данные измерений. Поэтому они могут быть занесены в таблицу (рис. 1.2). Здесь мы могли бы добавить столбик

s_2 - s_1 , который показывает, как величина площади увеличивается при уменьшении этой разности.



	s1=	s2=	F=
1	5,00	7,00	35,00
2	4,70	7,30	34,31
3	4,40	7,60	33,44
4	3,87	8,13	31,45
5	3,30	8,70	28,71
6	3,07	8,93	27,40
7	2,47	9,53	23,52
8	2,20	9,80	21,56
9	1,87	10,13	18,92
10	1,60	10,40	16,64
11	1,07	10,93	11,66
12	0,80	11,20	8,96
13	0,37	11,63	4,27
14	0,17	11,83	1,97
15	0,00	12,00	0,00
16			
17			
18			

Рис. 1.2

К графической наглядности функциональной зависимости $s_1 \to F(s_1)$ при постоянных U и s, значения s_1 и F наносятся на ось s_1 и ось F. Точка (s_1; F) создает график в виде следа (рис. 1.3), который на этапе исследования изменения параметров s и U заменяется графическим объектом в виде непрерывной линии (Рис. 4a). Краевой максимум не является инвариантом; поскольку для s = 5 (см) и U = 26 (см), мы получаем относительный максимум значения площади, который одновременно является абсолютным максимумом (рис. 4b). Что является условием для этой перемены?…

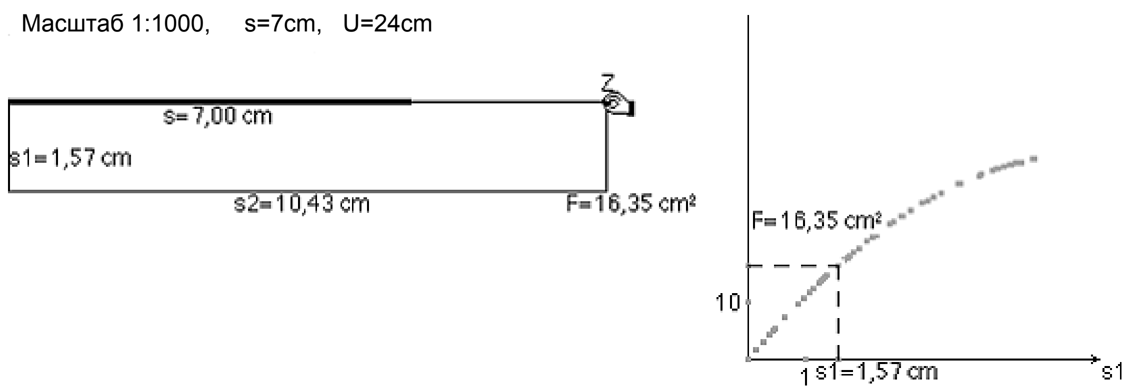
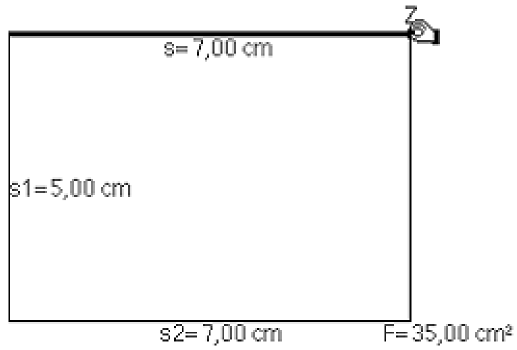


Рис.1.3

Масштаб 1:1000,   s=7cm,   U=24cm



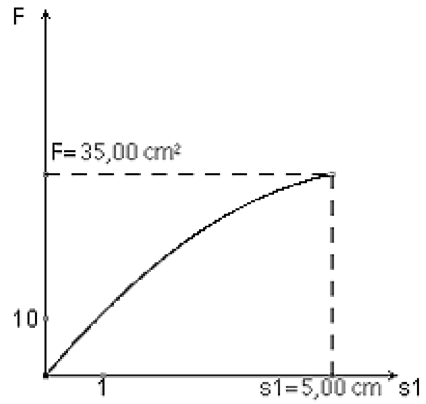
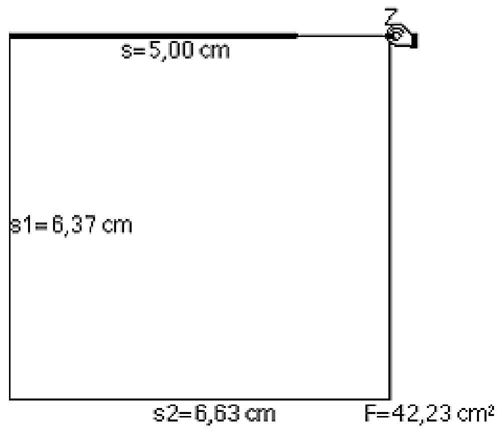


Рис. 1.4a

Масштаб 1:1000,   s=5cm,   U=26cm



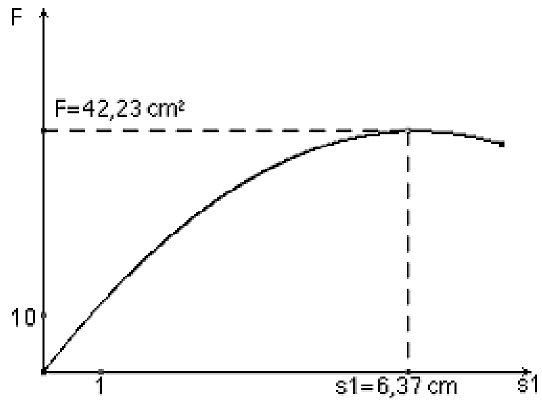


Рис. 1.4b

Пример 1.2. Задача упаковки.

Исследуйте значение величины площади F, развернутой упаковки, которая имеет постоянный объем V_0=20 см^3 (изменяйте Z). Измените также V_0.

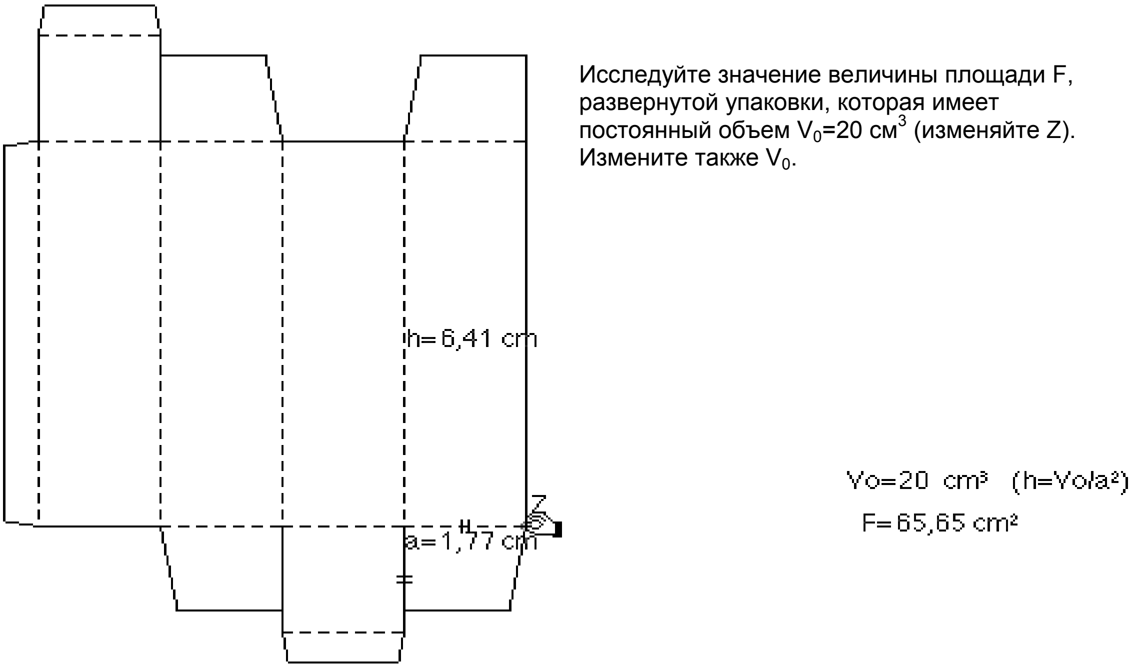


Рис. 1.5a

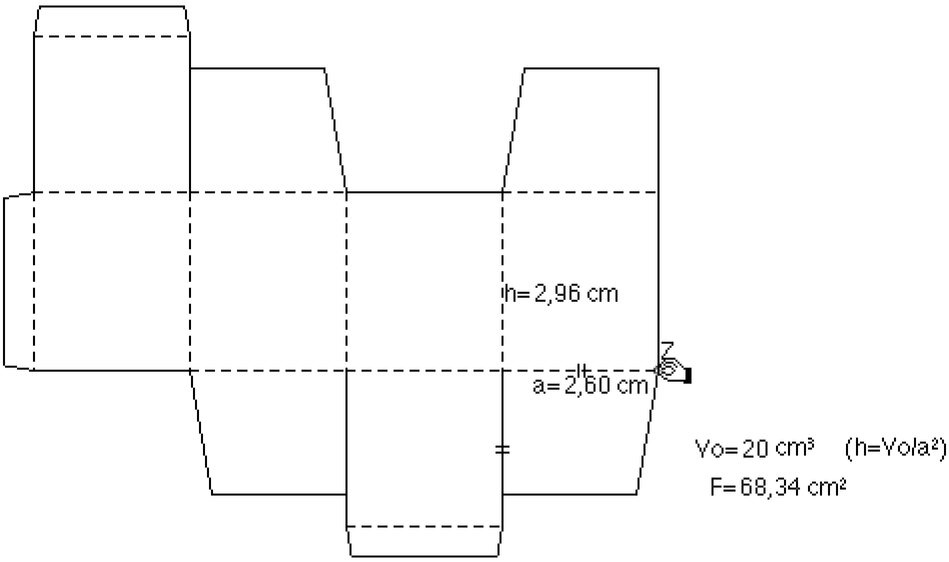


Рис. 1.5b

Перейдем к исследованию площади реально существующего типа упаковочной тары (рис.1.5а). При этом “упакованный” объем постоянен (инвариант трансформации поверхности). (Такие развертки можно напечатать, потом вырезать и сложить.) При перемещении точки Z мы создаем различные по форме развертки с различной площадью поверхности (рис. 1.5b). С помощью графика мы приближенно определяем минимум значения площади поверхности (рис.1.6). При изменении значения параметра V_0 (мы устанавливаем, что минимум сохраняется, т.е. обладает свойством инвариантности).

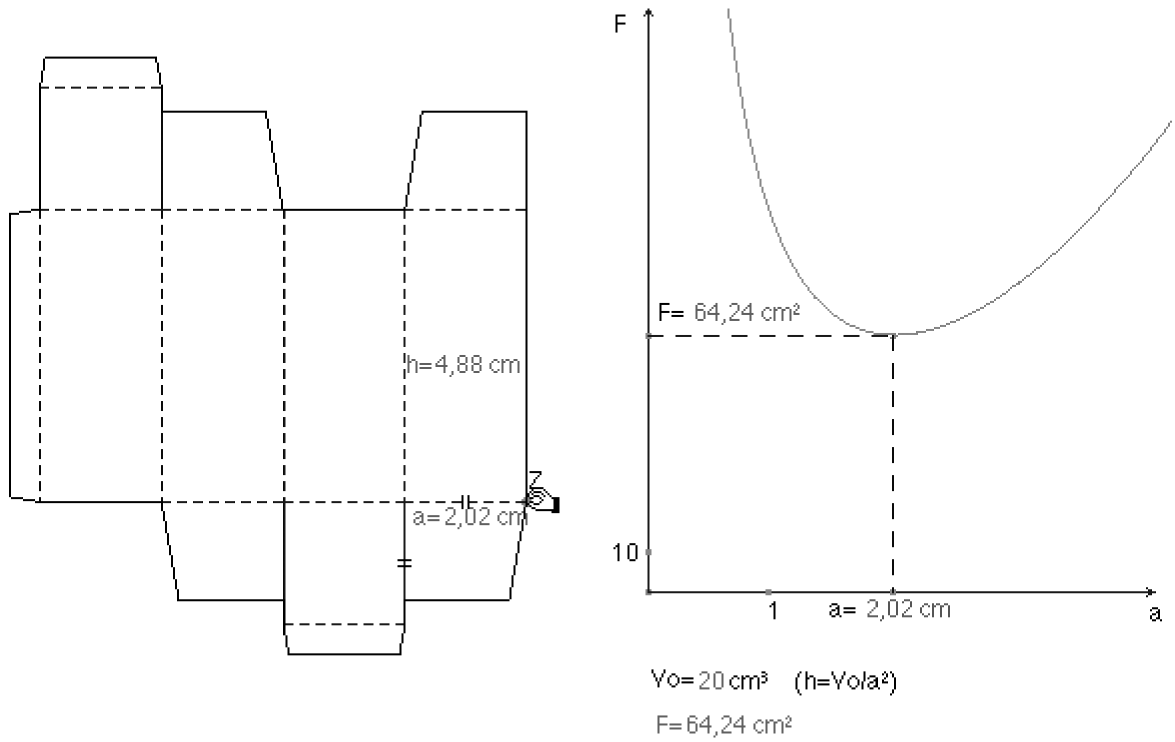


Рис. 1.6

Пример 1.3 (Вписанный объем)

Среди вписанных цилиндров один имеет максимальный объем, а другой - максимальную площадь (рис. 1.7а). Сохраняется ли это экстремальное поведение при изменении формы конуса?

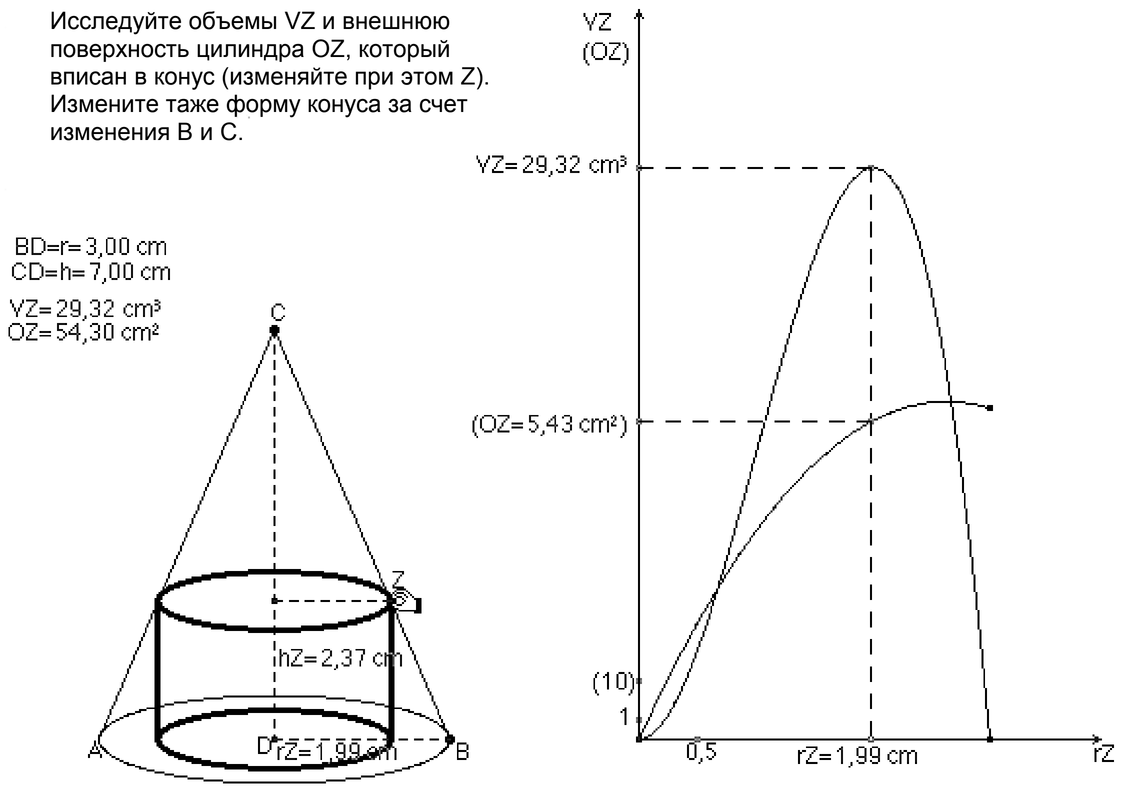


Рис. 1.7a

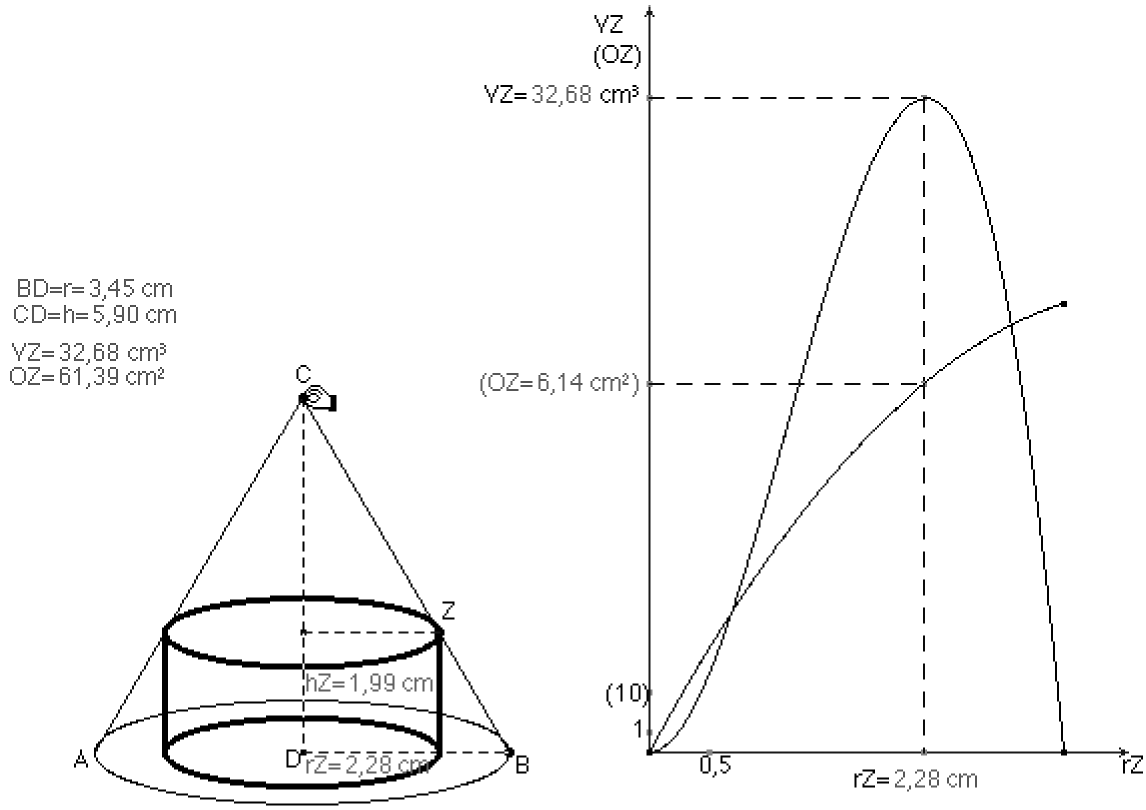


Рис. 1.7b

Для конуса с r = 3,45 LE и h = 5,90 LE больше не существует вписанного цилиндра с максимальной площадью поверхности (рис.1.7b).

Что является условием существования максимума площади поверхности?…

Пример 1.4 (Задача о банке)

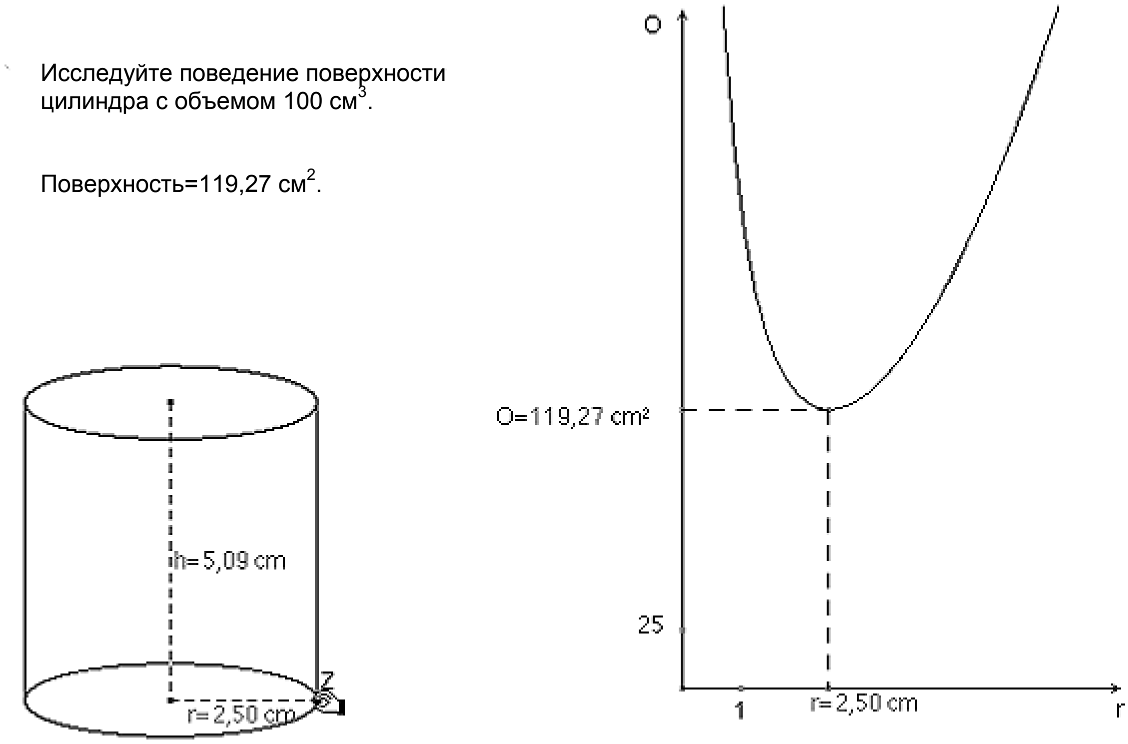


Рис. 1.8

Предположим: среди всех цилиндров с одинаковым объемом имеется только один, который имеет минимальную площадь поверхности. Его данные, зависящие от объема, мы можем определить приблизительно, следя за значением площади O (рис. 1.8). Эта задача является первым грубым моделированием прикладной задачи определения минимальных затрат материала.

Пример 1.5 (Задача туриста)

Рис. 1.9

На примере этой очень наглядной проблемы (рис. 1.9) хорошо понятно, как зависит угол зрения от расстояния наблюдателя, и как тип формы графика не меняется при изменении параметра задачи.

Пример 1.7 (Из геометрии координат)

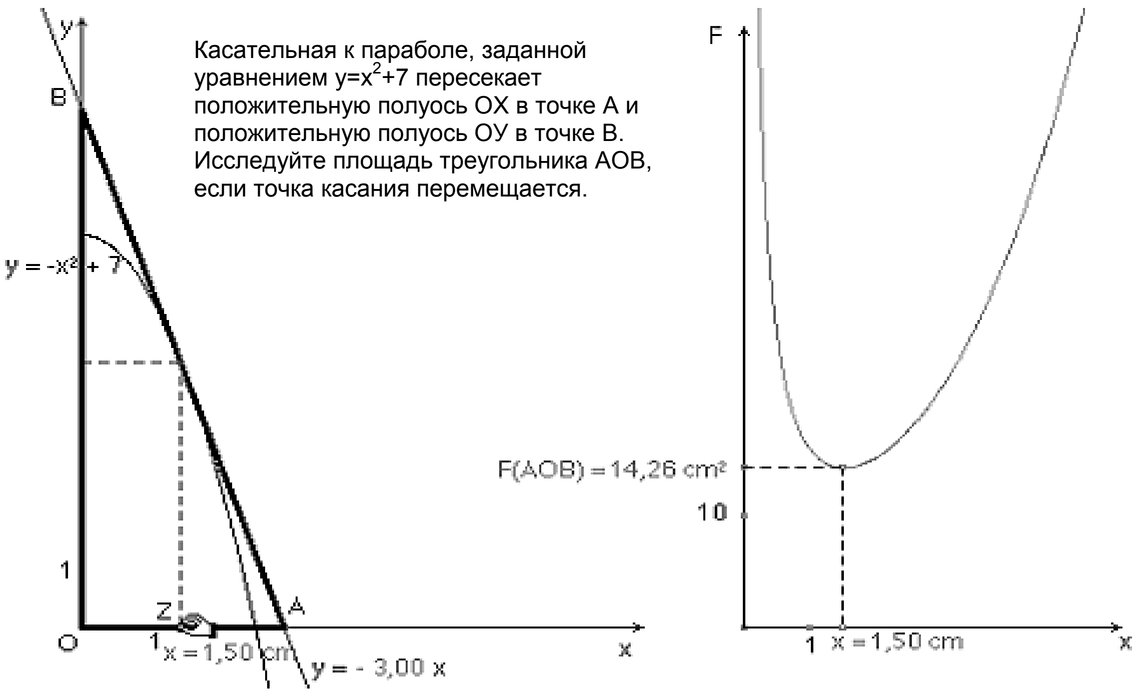


Рис. 1.10.

Также и обычные задачи координатной геометрии на нахождение экстремумов, как например, на рисунке 1.10, могут трактоваться динамически.

Пример 1.8 (Задача о прямоугольном параллелепипеде)

У прямоугольного параллелепипеда с гранями a, b, c срезан угол. Можно ли вписать прямоугольный параллелепипед с гранями a’, b’, c’ так, чтобы он имел наибольший объем?

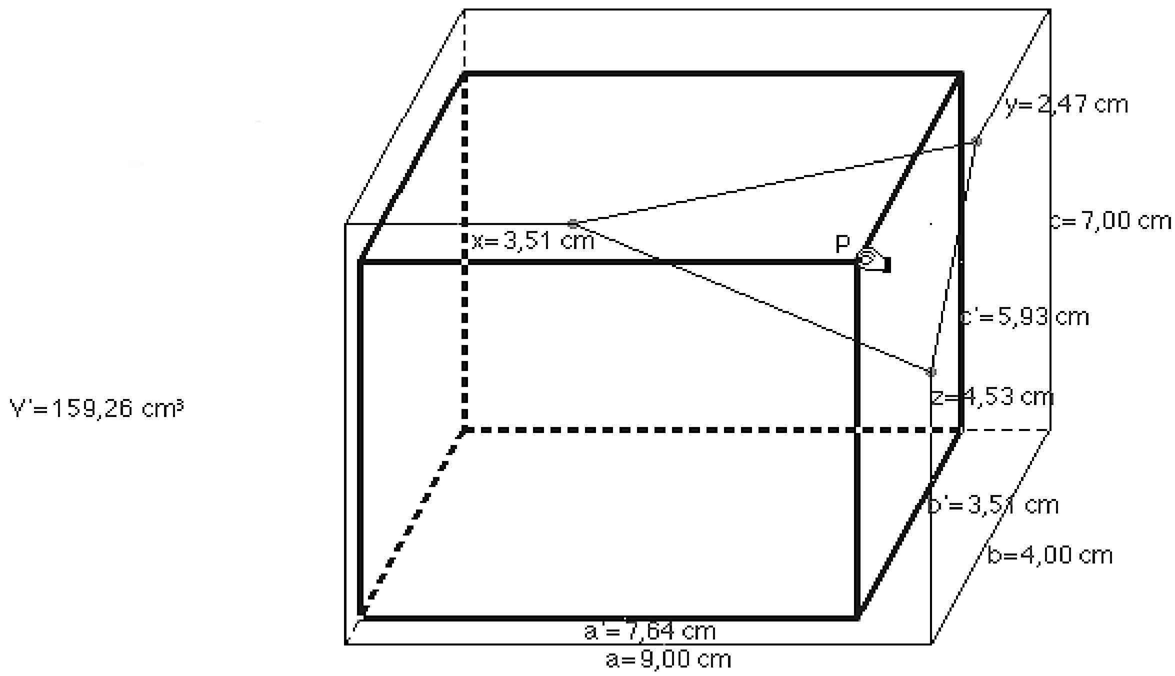


Рис. 1.11

Этот пример должен выявить границы применения динамической методики преподавания с использованием программных средств двухмерной графики, которые можно целенаправленно применять к задачам, в основе которых лежат функции одной действительной переменной. В этой задаче (рис. 1.11), объемном аналоге задачи в плоскости, которая легко подчиняется нашей методике необходимо перемещать точку P (вершину вписанного прямоугольного параллелепипеда) по треугольной поверхности среза, чтобы тот (приблизительно) принял максимальный объем, что можно обнаружить более или менее методом проб и ошибок …

1.4 Заключительные примечания.

В связи с использованием компьютера на уроках математики дидактика математики имеет среди прочих задач, развивать концепции использования новых компьютерных средств, как, например, представленной здесь, а также систематически апробировать их на практических занятиях.

1.5 Список литературы

Arbinger, R. (1997):	Psychologie des Problemlösens. Eine anwendungsorientierte Einführung. - Darmstadt: Primus
Baierlein, M. et al. (1997):	Anschauliche Analysis 1. - München: Oldenburg
Baumann, R. (1998):	Analysis 1, Grenzwerte, Differenzialrechnung, Optimierungsaufgaben. Ein Arbeitsbuch mit Derive. - Stuttgart: Klett.
Becker, J. B. u. S. Shimada (1997):	The Open-Ended Approach. A New Proposal for Teaching Mahtematics. - Reston, VA: NCTM
Bigalke, A.; N. Köhler (1995):	Analysis, Kursstufe. - Berlin: Cornelsen
Blum, W.; Törner, G. (1983):	Didaktik der Analysis. - Göttingen: Vandenhoek und Ruprecht.
Bock, H.; Walsch, W. (1993):	Mathematik entdecken, verstehen, anwenden. Analysis. - München: Oldenburg
Bronstein, I. N.; Semendjajew, K.A. (1984):	Taschenbuch der Mathematik. - 7. Auflage - Frankfurt/M.: Harri Deutsch
Claus, H. J. (1992):	Extremwertaufgaben. - Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft
Courant, R.; Robbins, H. (1962):	Analysis für den Leistungskurs, Klasse12/13. - Stuttgart: Metzler
Danckwerts, R. et al. (1991):	Was ist Mathematik? - Berlin: Springer

Griesel, H.; Postel, H. (1992):	Mathematik heute, Leistungskurs Analysis, Gesamtband. - Hannover: Schroedel/Schöningh
Keil, K. - A. et al. (1991):	Die Infinitesimalrechnung. - München: Bayerischer Schulbuchverlag
Kuypers, W.; Lauter, J. (1993):	Mathematik Sekundarstufe II, Analysis Leistungskurs. - Berlin: Cornelsen
Laborde, J.-M.; Bellmain, F. (1996):	Cabri Géomètre II. Version 1.0 - Dallas/USA u. Freising: Texas Instruments. (Deutsche Oberfläche und Bearbeitung des Handbuchs von H. Schumann)
Locher-Ernst, L. (1948):	Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen. - Basel: Birkhäuser
Pólya, G.(1962):	Mathematik und plausibles Schliessen, Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. - Basel: Birkhäuser
Quaisser, E., Sprengel, H.-J. (1986):	Extrema. - Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften
Rudio, F. et. al., Hrsg. (seit 1942):	Leonhard Euler: Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica. - Lausanne: Societas scientiarium naturalium Helvetica
Schmid, A.; Schweizer, W. (1990):	Analysis Leistungskurs, Gesamtausgabe. - Stuttgart: Klett.
Schmidt, W. (1984):	Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt. - Stuttgart: Klett.
Schumann, H. (1984):	Inhalts- und umfangsextremale Eigenschaften achsensymmetrischer Vierecke. - In: MU (30), Heft 6, S. 38 - 44.
Schumann, H. (1991):	Experimentelles Lösen einfacher isoperimetrischer Probleme in einer interaktiven computergrafischen Lernumgebung. - In: Didaktik der Mathematik (19), Heft 3, S. 227 - 241
Schumann, H. (1992):	Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. - Stuttgart: Metzler u. Teubner
Schumann, H. (1993):	Eine Folge von Verpackungsproblemen. - In: MNU (36), Heft 1, S. 7 - 14
Schumann, H. (1997):	Neue Standards für das Lösen geometrischer Berechnungsaufgaben durch Computernutzung. - In: MNU (50), Heft 3, S. 172 - 175
Schumann, H. (1998):	Dynamische Behandlung elementarer Funktionen - In: Mathematik in der Schule (36), Heft 3, S. 172 - 188.

Schumann, H. (1998):	Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. - In: Mathematik in der Schule (36), Heft 10, S. 562 - 569
Schumann, H.; Green,D. (1994):	Discovering Geometry with a Computer. - Bromley/Kent: Chartwell-Bratt
Schupp, H. (1992):	Optimieren - Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. - Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.
Schupp, H. (1997):	Optimieren ist fundamental. - In: mathematik lehren 81 (April 1997), S. 4 – 10
Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H.(1997):	Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis. - Braunschweig: Vieweg
Treutlein, P. (1911):	Der geometrische Anschauungsunterricht. - Leipzig: B.G. Teubner
Winter, H. (1989):	Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. - Braunschweig: Vieweg
Wittmann, E. (1981):	Grundfragen des Mathematikunterrichts - 6. Auflage - Braunschweig: Vieweg
Wolff, G. (1962):	Die Elemente der Mathematik, Band 3 Arithmetik, Algebra und Analysis - 7. Auflage - Paderborn: Schöningh, Hannover: Schroedel
Wolfram, S. (1991):	Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer. - 2nd Edition. - Redwood City, CA: Addison-Wesley

„Вписанный и описанный“

Вписать прямоугольник в равнобедренный треугольник	→ Аналогия плоскость-плоскость	Описать равнобедренный треугольник вокруг прямоугольника
↓ Аналогия плоскость – пространство	→	↓ . . .
Вписать квадратный столб в квадратную пирамиду	Аналогия пространство-пространство	Описать квадратную пирамиду вокруг квадратного столба
↓ Аналогия пространство-пространство	→	↓ . . .
Вписать цилиндр в конус	Аналогия пространство-пространство	Описать конус вокруг цилиндра

Задания

a) Как меняется периметр и площадь вписанной или описанной плоских фигур?

b) Как меняется площадь поверхности и объем вписанной и описанной объемных фигур?

c) Какие задачи экстремума ты можешь сформулировать?

d) Реши задачи экстремума (прими во внимание различные случаи).